TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung zu lokalkonvexen Räumen

17. Sei X ein topologischer Vektorraum und $T : X \to X$ eine lineare Abbildung. Sei ferner $\mathfrak{B}$ eine 0-Umgebungsbasis. Zeige, dass T genau dann stetig ist, wenn für jedes $U \in \mathfrak{B}$ ein $V \in \mathfrak{B}$ mit $T(V) \subseteq U$ existiert.

18. Sei $0 < p \leq 1$. Für eine Folge $x = (x_n) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ setze

$$\|(x_n)\|_p := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

Betrachte die Menge

$$\ell^p := \big\{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|(x_n)\|_p < \infty\big\}.$$

Zeige, dass $d : \ell^p \times \ell^p \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) := \|x-y\|_p$ eine Metrik ist. Somit wird ℓ^p ein vollständiger metrischer Raum und auch ein topologischer Vektorraum. Gib (möglichst viele) Beispiele von stetigen Linearfunktionalen auf ℓ^p an! Ist ℓ^p lokalkonvex?

19. Sei $\mathscr{P}$ eine Familie von Halbnormen auf einem Vektorraum X. Definiere

$$\mathscr{Q} := \big\{\max\{p_1,\dots,p_n\} : n \in \mathbb{N},\, p_i \in \mathscr{P}\big\}.$$

Zeige, dass $\mathscr{Q}$ aus Halbnormen besteht und, dass es die gleiche Topologie wie $\mathscr{P}$ definiert.

20. Sei X eine lokalkonvexer TVR mit definierende Familie von Halbnormen $\mathscr{P}$. Zeige, dass eine Halbnorm q genau dann stetig ist, wenn sie in 0 stetig ist. Dies gilt genau dann, wenn $p_1,\dots,p_n \in \mathscr{P}$ und $C > 0$ mit $q(x) \leq C\max\{p_1(x),\dots,p_n(x)\}$ (für alle $x \in X$) existieren.

21. Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $U \subseteq X$ eine kreisförmige, konvexe und absorbierende Menge. Zeige, dass das Minkowski-Funktional p_U defniert durch

$$p_U(x) := \inf\{r > 0 : x \in rU\}$$

ein Halbnorm ist.

22. Zeige, dass ein lokalkonvexer Raum genau dann Hausdorffsch ist, falls für jedes $x \in X$, $0 \neq x$ eine stetige Halbnorm p auf X mit $p(x) \neq 0$ existiert. Zeige, dass für jedes stetige lineare Funktional f auf X, $p := |f|$ eine stetige Halbnorm ist. Zeige ferner, dass in der obigen Äquivalenz p auch von dieser Form gewählt werden kann. *Hinweis: Satz von Hahn-Banach!*

23. Sei X ein topologischer Vektorraum und p_n, $n \in \mathbb{N}$ eine separierende Folge von stetigen Halbnormen. Zeige, dass durch

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

eine Metrik definiert ist, welche genau die Topologie von X bestimmt.

24. Gib eine Familie von Seminormen an, welche die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $C(\mathbb{R})$ bestimmt. Ist diese Topologie Hausdorffsch? †Ist sie metrisierbar?

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

25. Betrachte $X = C(\mathbb{R}^d)$ und für $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt die Halbnormen $p_K : C(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p_K(f) := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Zeige, dass die lokalkonvexe Topologie definiert durch diesen Halbnormen mit einer vollständiger Metrik metrisierbar ist. Zeige, dass eine Folge $(f_n) \subseteq C(\mathbb{R}^d)$ genau dann gegen ein f konvergiert, wenn die Konvergenz $f_n \to f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Menge gilt. Gib Beispiele stetiger linearer Funktionale auf diesem TVR an. Zeige, dass $\mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $C(\mathbb{R}^d)$ liegt.

26. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Betrachte die Menge

$$\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(K) := \big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \subseteq K \big\},$$

und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ die Halbnormen $p_{K,\alpha}(f) := p_K(\partial^\alpha f)$. Zeige, dass diese Halbnormen eine vollständig metrisierbare lokalkonvexe Topologie auf $C_c^\infty(K)$ definieren. Zeige, dass eine Folge $(f_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ genau dann gegen ein$f$ konvergiert, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ die Konvergenz $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Menge gilt. Gib Beispiele stetiger linearer Funktionale auf diesem TVR an.

27. Sei X ein lokalkonvexer Raum. Eine Menge $B \subseteq X$ heißt **beschränkt**, falls für jede 0-Umgebung U ein $r > 0$ existiert mit $B \subseteq rU$. Zeige, dass eine Menge $B \subseteq X$ genau dann, beschränkt ist, wenn für jede stetige Halbnorm p die Menge $p(B) \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt ist. Beweise, dass eine Norm $\|\cdot\|$ auf X, welche die Topologie von X bestimmt, genau dann existiert, wenn in X eine konvexe, kreisförmige und beschränkte 0-Umgebung gibt. Zeige, dass $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(K)$ und $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (mit Topologie wie oben definiert) in diesem Sinne nicht normierbar sind.

†**28.** Für $0 < p < 1$ betrachte den Raum $L^p([0,1])$ versehen mit der Metrik $d(f,g) := \|f - g\|_p$. Zeige, dass d tatsächlich eine Metrik ist, versehen mit der wird $L^p([0,1])$ vollständig und ein topologischer Vektorraum. Sei U eine konvexe 0-Umgebung. Zeige, dass dann $U = L^p([0,1])$ gilt, und somit ist $L^p([0,1])$ nicht lokalkonvex. Zeige, dass auf diesem topologischen Vektorraum nur das 0-Funktional stetig ist. *Hinweis: Sei $f \in L^p([0,1])$. Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Unterteilung $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ von $[0,1]$ gibt, so dass $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(x)|^p \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x$. Setze $g_i := n\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}]} f$. Zeige, dass f ist konvexe Kombination von f. Schätze $\|g_i\|_p$ ab!*