Distributionen, WS09/10
Bálint Farkas
5. November 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2. Übung zu den L^p-Räumen

7.

a) Betrachte $\Omega = (0,1)$ und $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \le p \le \infty$ liegt f in $L^p(\Omega)$?
b) Betrachte $\Omega = (0,1)^d$ und $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \le p \le \infty$ liegt f in $L^p(\Omega)$?

8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum ($\mu(\Omega) < \infty$) und $1 \le r \le p \le \infty$. Beweise:

a) $L^p(\Omega,\mu) \subseteq L^r(\Omega,\mu)$.
b) Für $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ gilt $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.
c) Falls $f \in L^{p_0}$ für ein p_0, so gilt $\|f\|_1 = \lim_{p\to 1} \|f\|_p$.

Zeige auch, dass $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

9. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \dots, n$. Sei ferner $0 < p < \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Beweise:

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_p \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i} \quad .$$

10. Interpolationsungleichung. Seien $p_0, p_1 \in (0,\infty]$, $p_0 < p_1$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(\Omega,\mu) \cap L^{p_1}(\Omega,\mu)$, dann $f \in L^{p_\theta}(\Omega,\mu)$, und es gilt

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Wir haben auch den folgenden **"Interpolationssatz"** gesehen: Für $0 < p < r < q < \infty$ gilt

$$\|f\|_p \le 1,\ \ \|f\|_q \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_r \le 1.$$

11. Beweise die Interpolationsungleichung mithilfe der Interpolationssatz! *Hinweis: multipliziere μ und f mit geeigneten Skalaren, so dass der Interpolationssatz verwendbar wird.*

12. Beweise, dass ein normierter Vektorraum X genau damm vollständig ist, falls für jede Folge $x_n \in X$ die Konvergenz der Skalar-Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ auch die Konvergenz der Vektor-Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ in X impliziert.

13. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die folgenden Aussagen sind zu beweisen.

a) Der Raum $L^1 \cap L^\infty(\Omega,\mu) := L^1(\Omega,\mu) \cap L^\infty(\Omega,\mu)$, versehen mit der Norm $\|f\|_{L^1\cap L^\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$, ist ein Banachraum.
b) Definiere $L^1 + L^\infty(\Omega,\mu) := \{f : f : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar und $\exists g \in L^1(\Omega,\mu),\ h \in L^\infty(\Omega,\mu)$ mit $f = g + h\}$. Die Abbildung

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty : f = g + h,\ h \in L^1,\ g \in L^\infty\}.$$

ist eine Norm, versehen mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

14. Beweise das Folgende: Für $1 < p < \infty$ sind L^p-Räume strikt konvex, d.h. für $f, g, \in L^p(\Omega,\mu)$ mit $\|f+g\|_p = 2$, $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ gilt $f = g$. Was kann man im Falle $p = 1, \infty$ aussagen? Für welche $p \in (0, +\infty]$ sind die Einheitskugel in L^p konvex?

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15. Beweise, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$ versehen mit $*$ eine kommutative Banach algebra ist, die kein neutrales Element besitzt! Wie sollte ein "solches Element" aussehen?

16. Beweise:

a) Falls $f \in C(K)$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, dann gilt $\sup_{x\in K} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty}$ =wesentliche Supremum von f.

b) Der Raum $F_b(\mathbb{R}^d)$ aller beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum.

c) $BUC(\mathbb{R}^d)$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum.

d) Eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist genau dann gleichmässig stetig, wenn die Abbildung
$$\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \tau_y f \in F_b(\mathbb{R}^d)$$
bezüglich der sup-Norm stetig ist.