Distributionen, WS09/10
Bálint Farkas
22. Oktober 2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

## 1. Übung zu den Dualraum von $\mathbf{C}([0,1])$

Wir wollen eine Darstellung für den Dualraum von $\mathrm{C}([0,1])$ finden. Wir führen zunächst einige Begriffe ein.

**1.** Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die **Variation** von $g$ auf $[a,b] \subseteq [0,1]$ ist definiert durch

$$\operatorname*{V}_a^b g := \sup_{t_0=a<t_1<t_2<\ldots<t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_i) - g(t_{i-1})|.$$

Ist $\mathrm{V}_0^1 g <= \infty$, so heißt $g$ eine Funktion **von beschränkter Variation**. Die Menge aller solchen Funktionen auf $[0,1]$ wird mit $\mathrm{BV}([0,1])$ bezeichnet. Zeige, dass die Menge $\mathrm{BV}([0,1])$ ein Vektorraum ist, auf dem die Abbildung $g \mapsto \mathrm{V}_0^1 g$ eine Halbnorm definiert. Gib Beispiele für BV und nicht BV Funktionen an. Zeige $\mathrm{V}_a^b g + \mathrm{V}_b^c g = \mathrm{V}_a^c g$ für $a \le b \le c$.

**2.** Sei $f \in \mathrm{C}([0,1])$ und $g \in \mathrm{BV}([0,1])$. Im Folgenden werden wir Unterteilungen $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ des Intervalls $[0,1]$ betrachten mit $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$. Betrachte eine verfeinernde Folge $P_k$ von Unterteilungen, so dass $\max\{t_{i+1}^k - t_i^k : i = 1, \ldots, n^k\} \to 0$ für $k \to \infty$. Diese Eigenschaft werden wir mit der Bezeichnung "$P_k \to 0$" notieren. Zu einer Unterteilung $P_k$ betrachte die Summe

$$S_{P_k} := \sum_{i=0}^{n_k-1} f(t_i^k)(g(t_{i+1}^k) - g(t_i^k)).$$

Zeige, dass für $P_k \to 0$ die Folge $S_{P_k}$ konvergiert und, dass der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folge $P_k$ ist. Der Limes

$$\int_0^1 f \,\mathrm{d}g := \lim_{P_k \to 0} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(t_i^k)(g(t_{i+1}^k) - g(t_i^k)),$$

nennt man das **Riemann-Stieltjes Integral** von $f$ bezüglich $g$. Analog definiert man den Ausdruck $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$.

**3.** Beweise die folgenden Eigenschaften des Riemann-Stieltjes Integrals:

a) Für $f_1, f_2 \in \mathrm{C}([0,1])$, $g \in \mathrm{BV}([0,1])$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\int_0^1 (f_1 + \lambda f_2) \,\mathrm{d}g = \int_0^1 f_1 \,\mathrm{d}g + \lambda \int_0^1 f_2 \,\mathrm{d}g$

b) Für $f \in \mathrm{C}([0,1])$, $g_1, g_2 \in \mathrm{BV}([0,1])$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\int_0^1 f \,\mathrm{d}(g_1 + \lambda g_2) = \int_0^1 f \,\mathrm{d}g_1 + \lambda \int_0^1 f \,\mathrm{d}g_2$

c) Für $f \in \mathrm{C}([0,1])$ gelten $\int_0^1 f \,\mathrm{d}\mathbf{1} = 0$ und $\int_0^1 f \,\mathrm{d}(\mathrm{id}) = \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x$. $(\mathrm{id}(x) = x)$

d) Ist $g \in C^1[0,1]$ so ist $g \in \mathrm{BV}([0,1])$ und es gilt $\int_0^1 f \,\mathrm{d}g = \int_0^1 f(x) g'(x) \,\mathrm{d}x$

e) Für $f, g \in \mathrm{C}([0,1]) \cap \mathrm{BV}([0,1])$ gilt $\int_0^1 f \,\mathrm{d}g = fg\Big|_0^1 - \int_0^1 g \,\mathrm{d}f$.

**4.** Für $g \in \mathrm{BV}([0,1])$ definiere

$$\phi_g(f) = \int_0^1 f \,\mathrm{d}g.$$

Dann ist $\phi_g \in (\mathrm{C}([0,1]))'$ mit $\|\phi_g\| = \mathrm{V}_0^1 g$. Beweise dies!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**5.** Alle Funktionen in dieser Aufgabe sind auf $[0,1]$ definiert.

a) Beweise, dass eine monotone Funktion in $\mathrm{BV}([0,1])$ ist.

b) Sei $g \in \mathrm{BV}([0,1])$. Zeige, dass die Funktion $h(t) := \mathrm{V}_0^t\, g$ monoton steigend und $f(t) := g(t) - h(t)$ monoton fallend ist. Zeige, dass jede BV-Funktion kann als die Summe zweier monotonen Funktionen dargestellt werden.

c) Sei $g \in \mathrm{BV}([0,1])$ und $f \in \mathrm{C}([0,1])$ falls nicht explizit gegeben. Berechne $\int_0^1 f\,\mathrm{d}g$ für

(i) $f = \mathbf{1}$ (ii) $g = \mathbf{1}_{[0,a)}$ (iii) $g = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{[a_j, a_{j+1})}$ (iv) $g(x) = x^2 + \operatorname{sign}(x - 1/2)$, $f(x) = x$.

d) Sei $g(x) = 1/2 - |x - 1/2|$. Zeige $g \in \mathrm{BV}([0,1])$, also $\phi_g \in (\mathrm{C}([0,1]))'$. Nach dem Riesz'schen Darstellung-Satz existieren Maße $\mu^+$, und $\mu^-$ auf $[0,1]$, so dass $\phi_g(f) = \int f\,\mathrm{d}\mu^+ - \int f\,\mathrm{d}\mu^-$. Gib diese Maße an.

**6.** Sei $\phi \in (\mathrm{C}([0,1]))'$. Dann existiert ein $g \in \mathrm{BV}([0,1])$, so dass

$$\text{für alle } f \in \mathrm{C}([0,1]) \text{ gilt} \quad \phi(f) = \int_0^1 f\,\mathrm{d}g$$

und $\|\phi\| = \mathrm{V}_0^1\, g$ gelten. Beweise dies! *Hinweis: betrachte die charakteristische Funktion* $\mathbf{1}_{[0,t)}$. *Diese ist zwar nicht stetig, aber wenn* $g(t) := \phi(\mathbf{1}_{[0,t)})$ *sinnvoll definiert werden könnte, würde sie das gewünschte* $g$ *ergeben. Um* $\phi(\mathbf{1}_{[0,t)})$ *zu definieren, betrachte statt* $\phi$ *eine geeignete Fortsetzung* $\psi$ *auf dem Raum von beschränkten messbaren Funktionen.*