Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 01.02.2010

Höhere Mathematik 1

13. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G37

Gegeben sind die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Berechnen Sie $\varphi(u_4)$.
Hinweis: Geben Sie u_4 als Linearkombination von u_1, u_2, u_3 an und nutzen Sie dann die Linearität von φ aus.

c) Geben Sie einen Vektor u_5 mit $\varphi(u_5) = w$ an.
Hinweis: Gehen Sie analog zu Teil b) vor, d.h. geben Sie w als Linearkombination der Bilder von u_1, u_2, u_3 an und nutzen Sie dann die Linearität aus.

Aufgabe G38

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix},\ v \in \mathbb{R}^2.$

b) $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto v + t$ mit $t \in \mathbb{R}^n$ fest.

c) $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ u \mapsto \alpha u$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ fest.

d) $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto p(x)$ für beliebige $p \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$.

Aufgabe G39

Überprüfen Sie jeweils, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

a)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

b)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$