Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
07.12.2009

Höhere Mathematik 1 - Probeklausur

Nachname	
Vorname	
Studiengang	

Matr.-Nummer		Semester	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	6	6	4	8	6	6	36	
err. Punkte								

Falten Sie bitte vor dem Abgeben das Aufgabenblatt **HIER** und legen Sie Ihre Lösungen hinein.

Wichtig: Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes verwendete Blatt, nummerieren Sie alle Seiten.
Bearbeitungszeit: **90 Minuten**.
Alle Ergebnisse und Teilergebnisse müssen sorgfältig begründet werden.

Aufgabe 1
Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

a) $|x| \leq \frac{3}{x+2}$.

b) $2^{4x} = \sqrt{8^{x+2}}$.

c) $\cos(x) + \cos(-x) + \sin(x) + \sin(-x) = 2$.

Aufgabe 2
Es sei $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

a) Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend und damit umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f.

Aufgabe 3
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Aufgabe 4
Betrachten Sie die rekursive Folge $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

c) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 5
Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke auf Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls in a) und b) die Grenzwerte an.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+17}{(n+1)^2}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$.

Aufgabe 6
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 2. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

c) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\arg(z_1), \arg(z_2) \in (0, \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow \arg(z_1 \cdot z_2) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion $\Longrightarrow f(0) = 0$.