



Höhere Mathematik 1

7. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G19

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 + n}.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) + \sin(n\pi)}{2n}.$$

Aufgabe G20

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{4^n} x^{2n}.$$

b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

Aufgabe G21

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen und untersuchen Sie die Reihen auch auf den Rändern des Konvergenzintervalls auf ihr Verhalten. (Hinweis: Der Konvergenzradius lässt sich auch durch $\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ bestimmen, falls dieser Grenzwert existiert.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}.$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1} x^{2n}.$

Hausübungen

Aufgabe H19

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2}.$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+k^2+1}.$$

Aufgabe H20

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Reihe durch günstige Zerlegung des Bruches (vgl. Beispiel 4.5.3 des Skriptes).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

Aufgabe H21

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen und untersuchen Sie die Reihen auch auf den Rändern des Konvergenzintervalls auf ihr Verhalten.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^n.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}x^{3n}.$$

d) Geben Sie eine Potenzreihe mit $x_0 = 0$ und Konvergenzradius 3 an, die in 3 konvergiert und in -3 divergiert.