Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 23.11.2009

Höhere Mathematik 1

6. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G16

Überprüfen Sie, ob die Folgen konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{n^2+3}{5(n^2+4n)}$.

b) $b_n = \frac{4^n+(-5)^n}{5^n+6}$.

c) $c_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$. (Hinweis: Verwenden Sie eine Ihnen bekannte Folge!)

Aufgabe G17

Betrachten Sie folgende rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 7$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{7}{a_n}).$$

a) Berechnen Sie a_2, a_3 und a_4.

b) Zeigen Sie, dass die Folge durch die Zahl 0 nach unten beschränkt ist.

c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Folge monoton fallend ist. Zeigen Sie dafür zunächst, dass $a_n^2 - 7 \geq 0$ ist.

d) Warum konvergiert die Folge? Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe G18

Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen.

a) $a_n = \sqrt{7n+2} - \sqrt{7n}$.

b) $b_n = n2^{-n}$.

c) $c_n = \frac{\pi^n}{n!}$.

d) $d_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$.

Hausübungen

Aufgabe H16
Überprüfen Sie, ob die Folgen konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert bzw. die Häufungspunkte.

a) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

b) $b_n = \frac{2n^2+n+1}{n} - \frac{2n^3+2}{n^2}$.

c) $c_n = \frac{6^n+(-5)^n}{5^n+6}$.

Aufgabe H17
Untersuchen Sie, ob die Folge

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_{n+1} &= \sqrt{1+c_n}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe H18
Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen.

a) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

b) $b_n = \frac{n!}{n^n}$.

c) $c_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$.

d) $d_n = n^k 2^{-n}$ für beliebiges (festes) $k \in \mathbb{N}$.