Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 16.11.2009

Höhere Mathematik 1

5. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G13

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Gleichung

$$\tan^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1.$$

b) Bestimmen Sie jeweils die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

$$(3+i) \cdot z - \frac{1}{i} = 2 + 3i$$

und

$$z^4 = i$$

und geben Sie ihren Real- und Imaginärteil sowie ihren Betrag an. Skizzieren Sie die Lösungen z in der Gauß‘schen Zahlenebene.

Aufgabe G14
Zeigen Sie folgende Additionstheoreme:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Hinweis: Benutzen Sie $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $e^{z+w} = e^z e^w$ für $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe G15
Das Pendel einer Uhr mit einer Schwingungsdauer (Periode) von zwei Sekunden wird in der ersten Sekunde jeder Periode durch einen Stoß angeregt. Dabei vermehrt sich seine Gesamtenergie jeweils um ein Joule. In der restlichen Zeit der Periode verringert sich die Energie des Pendels aufgrund von Reibungsverlusten jeweils um vier Prozent. E_n bezeichne die Gesamtenergie des Pendels zu Beginn der n-ten Periode.

a) Wie lautet die Rekursionsformel für die Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Zeigen Sie für den Fall $E_1 = 0$, dass die Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch 24 beschränkt ist (d.h. dass $E_n \leq 24$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt) und monoton wächst.

Hausübungen

Aufgabe H13

a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen folgender Polynome:

$$Q(x) = 2x^2 - 6x + 8,$$

$$R(x) = 3x^2 - 3x + 18.$$

b) Sei $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$. Geben Sie ein Polynom vom Grad 3 an, so dass $P(x_i) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$.

c) Sei

$$u = \tan \frac{x}{2}.$$

Geben Sie $\sin x$ und $\cos x$ als Funktionen von u an.

Aufgabe H14

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag der folgenden komplexen Zahlen mit $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 2 - 3i$ und skizzieren Sie z_1, z_2, z_3, z_4 und z_5 in der komplexen Zahlenebene.

a)

$$z_3 = \bar{z}_1 \cdot z_2.$$

b)

$$z_4 = \frac{z_1}{\bar{z}_2}.$$

c)

$$z_5 = (1 + i)^{20}.$$

Aufgabe H15

Gegeben sei die Folge

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{6} \\ a_2 &= \sqrt{6 + \sqrt{6}} \\ a_3 &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \\ &\dots \end{aligned}$$

a) Wie lautet die Rekursionsformel für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

b) Zeigen Sie, dass die Folge durch die Zahl 3 nach oben beschränkt ist, d.h. dass $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend ist.