Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 09.11.2009

Höhere Mathematik 1

4. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G10
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der folgenden Funktionen.

a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}.$$

b)

$$g(x) = \frac{|x + 1|}{x^2 - 1}.$$

Aufgabe G11
Sind folgende Funktionen injektiv? Sind sie surjektiv? Sind sie bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$.

c) $h : \mathbb{Z} \to \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ gerade}\}$, $h(n) = 2n$.

d) $i : \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ ungerade}\} \to \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ gerade}\}$, $i(n) = 2n$.

Aufgabe G12
Welche der folgenden Funktionen haben eine Umkehrfunktion? Berechnen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion und geben Sie deren Definitionsbereich an. Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion und der zugehörigen Umkehrfunktion, falls diese existiert.

a) $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.

b) $g : [-5, 5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-4x+2} - 3$.

Hausübungen

Aufgabe H10

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der folgenden Funktionen.

a)
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}.$$

b)
$$g(x) = \frac{x}{|x|}.$$

c)
$$h(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 - 3x + 2}.$$

Aufgabe H11

Welche der folgenden Funktionen haben eine Umkehrfunktion? Berechnen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion und geben Sie deren Definitionsbereich an. Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion und der zugehörigen Umkehrfunktion, falls diese existiert.

a) $f : [1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$.

b) $g : [-2, 0] \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

c) $h : [0, 4] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ x & \text{für } 2 < x \leq 4. \end{cases}$

Aufgabe H12

Es sei $f : [1, 10] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$.

a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f und geben sie deren Definitionsbereich an.