Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 19.10.2009

Höhere Mathematik 1

1. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1
Zeigen Sie, daß für beliebige Aussagen A_1, A_2, A_3 die folgenden Gesetzmäßigkeiten gelten.

a) $\neg(A_1 \wedge A_2) \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)$.

b) $\neg(A_1 \vee A_2) \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$.

c) $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)) \Leftrightarrow ((A_1 \wedge A_2) \Rightarrow A_3)$.

Aufgabe G2
Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ und geben Sie deren Werte an.

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$.

b) $2 + 4 + 6 + 8 + 10$.

c) $2 + 4 + 8 + 16$.

d) $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \ldots + 10$.

e) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{65536}$.

f) $\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1}_{\text{20 Summanden}}$.

g) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots + \frac{2}{2187}$.

Aufgabe G3
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hausübungen

Aufgabe H1

Seien A, B, C Teilmengen von reellen Zahlen mit $A \subset B \subset C$. Veranschaulichen Sie diese Mengenbeziehungen anhand eines Bildes. Seien $a \in A$ und $b \in B$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie bei den falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

a) $a \in B$.

b) $b \in A$.

c) $a \subset B$.

d) $A \in B$.

e) $A \subset C$.

f) $C \setminus A \subset C \setminus B$.

g) $C \setminus B \subset C \setminus A$.

h) $B = B \cap C$.

i) $C = B \cup C$.

j) $b \in C \setminus A$.

Aufgabe H2

Zeigen Sie durch indirekten Beweis:

a) Ist n^4 für $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist auch n ungerade.

b) Ist $n^3 + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ist n ungerade.
Hinweis: Jede ungerade Zahl läßt sich schreiben als $2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe H3

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.