Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Claudia Möller

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/10
20. Januar 2010

11. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Beim Lotto werden sechs Zahlen aus $\{1, \ldots, 49\}$ ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Menge zwei Zahlen mit Differenz 1 enthält?

Aufgabe G2

Ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ heiße zulässig, wenn die Anzahl seiner Buchstaben 0 eine gerade Anzahl ist. Stellen Sie eine Rekursion für die Anzahl a_n der zulässigen Wörter der Länge n auf.

Aufgabe G3

Sei k eine positive ganze Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass jeder einfache Graph mit $n > k$ Knoten und mehr als $n(k-1) - \binom{k}{2}$ Kanten alle Bäume mit k Kanten enthält.

Hinweis: Zeigen Sie dafür, dass G alle Bäume mit k Kanten enthält, wenn der minimale Knotengrad von G mindestens k ist.

(b) Konstruieren Sie für jedes k einen einfachen Graphen mit $n > k$ Knoten und $n(k-1)/2$ Kanten, der keinen Baum mit k Kanten enthält.

(c) Zeigen Sie für $k \in \{1, 2, 3\}$, dass jeder einfache Graph mit n Knoten und mehr als $n(k-1)/2$ Kanten alle Bäume mit k Kanten enthält.

Aufgabe G4

Sei G ein Graph, dessen Zykel mit ungerader Länge sich paarweise schneiden, d.h. dass jeweils zwei Zykel ungerader Länge einen gemeinsamen Knoten haben. Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq 5$, wobei $\chi(G)$ die chromatische Zahl von G ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Wieviele Isomorphietypen von Bäumen gibt es zu jeweils aufsteigenden Gradfolgen mit den nachstehend beschriebenen Anfängen? Zeichnen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $(1, 1, 1, 3, ...)$

(b) $(1, 1, 2, 3, ...)$

(c) $(1, 1, 1, 1, 3, ...)$

(d) $(1, 1, 1, 2, ...)$

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Sei G ein d–regulärer Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, dass die Gesamtzahl der Dreiecke in G und dessen Komplementärgraphen $\overline{G}$ genau $\binom{n}{3} - \frac{n}{2}d(n-d-1)$ ist.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Ein Graph heißt *outerplanar*, falls er eine planare Einbettung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand des unbeschränkten äußeren Landes liegt. Beweisen Sie, dass weder K_4 noch $K_{2,3}$ outerplanar sind.