Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Claudia Möller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
11. Januar 2010

10. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Zeichnen Sie ein Modell der affinen Ebene der Ordnung 3 (d.h. jede Gerade inzidiert mit 3 Punkten).

(b) Ergänzen Sie das Modell aus (a) zu einer projektiven Ebene.

(c) Entfernen Sie eine Gerade mit ihren inzidenten Punkten aus der Fano-Ebene und zeigen Sie, dass dadurch eine affine Ebene entsteht.

Aufgabe G2

Sei X eine Menge mit $n^2 + n + 1$ Elementen, $n \geq 2$, und sei $\mathcal{L}$ eine Familie bestehend aus $n^2 + n + 1$ Teilmengen von X der Mächtigkeit $n + 1$. Zwei verschiedene Mengen aus $\mathcal{L}$ schneiden sich in höchstens einem Punkt. Ziel ist zu zeigen, dass $(X, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n ist.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Punktepaar aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{L}$ enthalten ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Punkt in höchstens $n + 1$ Mengen liegt.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Punkt in genau $n + 1$ Mengen liegt.

(d) Zeigen Sie, dass sich je zwei Mengen aus $\mathcal{L}$ schneiden.

(e) Folgern Sie, dass $(X, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n ist.

Aufgabe G3

Ein Computerprogramm ruft 7 Funktionen auf, die jeweils auf einer oder mehr von 6 Dateien zugreifen bzw. arbeiten und eine Zeiteinheit benötigen. Dabei dürfen je zwei Funktionen nicht gleichzeitig auf eine Datei zugreifen, sind ansonsten allerdings voneinander unabhängig.
Die folgende Tabelle zeigt, welche Funktion mit welcher Datei arbeitet:

Fkt.\Datei	1	2	3	4	5	6
1		x		x		
2	x		x	x	x	
3		x	x			x
4	x		x	x		
5		x	x			x
6	x					x
7		x		x	x	

Erstellen Sie einen Ablaufplan der 7 Funktionen unter Beachtung der möglichen Dateizugriffe: Wieviele Zeiteinheiten werden mindestens benötigt und wie müssen die Funktionen dann geplant werden?
Formulieren Sei dieses Problem dabei als ein geeignetes Graphenfärbungsproblem.

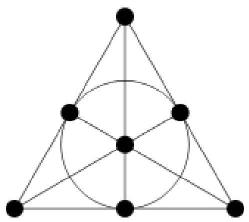
Aufgabe G4

Beweisen Sie anhand der Axiome: Durch Entfernen einer Geraden und aller mit ihr indizierenden Punkte aus einer projektiven Ebene entsteht stets eine affine Inzidenzebene.

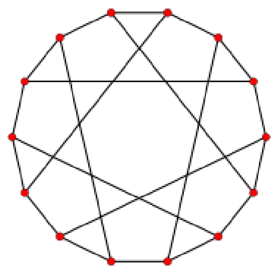
Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Die *Fano–Ebene* ist die projektive Ebene mit 7 Punkten (d.h. eindimensionalen Unterräumen von $\mathbb{F}_2^3$) und 7 Geraden (d.h. zweidimensionalen Unterräumen von $\mathbb{F}_2^3$). Zeigen Sie, dass der Inzidenzgraph der Fano-Ebene und der in der Abbildung angegebene *Heawood–Graph* isomorph sind.



Die Fano–Ebene



Der Heawood-Graph

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Fano–Ebene bis auf Isomorphie die einzige projektive Ebene der Ordnung 2 ist.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Elena und Enrico Macurati haben kleinere Weinberge in der Toskana. Die Rebstöcke mehrerer Parzellen sollen erneuert werden, und um die besten Rebsorten zu finden, hat Enrico den Plan gefasst, die 7 infrage kommenden Rebsorten zu testen: Er will von jeder Sorte einige Stöcke anpflanzen und dann in den nchsten 10 Jahren prüfen, welche Weinsorte in seinen Weinbergen die besten Erträge bringt. Die Bodengrundlage der Weinberge ist dabei in etwa gleich, aber Sonnenscheindauer und Niederschlagsmenge sind sehr verschieden. Daher hat Elena sich folgende Randbedingungen ausgedacht:

- Auf jedem Weinberg werden 3 Sorten gleichzeitig und gemischt angebaut.
- Je 2 Weinberge haben immer eine Sorte gemeinsam.
- Die Weinsorten werden so verteilt, dass jede Sorte mit jeder anderen Sorte einmal in einem gemeinsamen Weinberg steht.

Bestimme mithilfe projektiver Geometrie, wie der Anbauplan aussieht.