Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Claudia Möller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
3. Dezember 2009

7. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

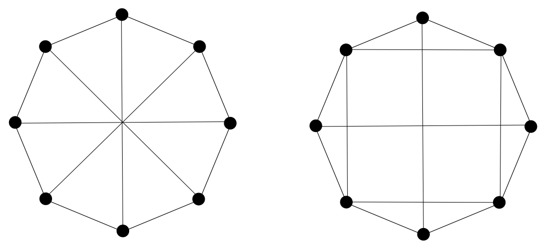
Aufgabe G1

Zeigen Sie, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist.

Aufgabe G2

(a) Ist das Komplement des Kreises C_6 planar?

(b) Welche der folgenden Graphen sind planar? Falls einer nicht planar ist, finde eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraph.



Aufgabe G3

Sei G ein Graph mit ebener Zeichnung, so dass jedes Land von genau drei Kanten berandet wird. Gegeben sei eine nicht unbedingt zulässige Färbung mit drei Farben. Zeigen Sie, dass es eine gerade Anzahl von Ländern gibt, deren Ecken mit drei Farben gefärbt sind.

Aufgabe G4

Zeigen Sie, dass jeder einfache dreiecksfreie planare Graph mit $n \geq 3$ Knoten maximal $2n - 4$ Kanten hat.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Finden Sie eine Eulerformel für unzusammenhängende Graphen.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass der duale Graph eines zusammenhängenden endlichen Graphen Γ planar und zusammenhängend ist. Zeigen Sie weiter, dass $(\Gamma^*)^* = \Gamma$ gilt, falls Γ zusammenhängend ist.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder planare Graph mindestens einen Knoten vom Grad ≤ 5 besitzt.

Hinweis: Folgen Sie dabei folgender Anleitung:

- Konstruieren Sie einen indirekten Beweis. Nehmen Sie an, es gäbe einen in der Ebene ohne Überschneidungen gezeichneten Graphen, bei dem alle Knoten Grad > 5 haben. Bezeichen Sie mit n die Anzahl der Knoten des Graphen, mit m die Anzahl der Kanten und mit f die Anzahl der Flächenstücke, in die der Graph die Ebene teilt.
- Seien $p_6, p_7, p_8, \ldots$ die Anzahlen der Knoten vom Grad $6, 7, 8, \ldots$. Zeigen Sie, dass
$$p_6 + p_7 + p_8 + \cdots \leq \frac{m}{3}.$$
- Seien $f_3, f_4, f_5, \ldots$ die Anzahlen der Flächen, die jeweils genau $3, 4, 5, \ldots$ Kanten auf dem Rand haben. Warum gilt $f = f_3 + f_4 + f_5 + \cdots$? Beweisen Sie die Ungleichung $f \leq \frac{2m}{3}$.
- Wenden Sie die Eulersche Polyederformel an.

Aufgabe H4 (6 Punkte)

Betrachte ein dreidimensionales Polytop P und die Gruppe G, die von allen Drehungen und Spiegelungen von P auf sich selbst erzeugt wird. Wir können annehmen, dass die Summe der Ecken 0 ist, dann ist G Untergruppe der orthogonalen Gruppe. Ein Tupel (v, e, L) mit v Ecke, e Kante und L Facette heißt Fahne von P, falls v auf e liegt und e an L grenzt.

P heißt platonischer Körper, wenn jede Fahne auf jede andere Fahne abgebildet werden kann. Zeige, dass es bis auf kombinatorische Äquivalenz nur 5 platonische Körper geben kann. (Zwei dreidimensionale Polytope P und Q heißen äquivalent, falls $\Gamma(P)$ isomorph zu $\Gamma(Q)$ ist.)