Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Claudia Möller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
25. November 2009

6. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei G ein Graph und v ein Blatt in G. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i. G ist ein Baum.
ii. $G - v$ ist ein Baum.

Definition: Ein Weg in einem Graphen G heißt hamiltonsch, wenn er jeden Knoten genau einmal enthält. Ein geschlossener hamiltonscher Weg heißt hamiltonscher Kreis. Wenn G einen hamiltonschen Kreis enthält, heißt G hamiltonsch.

Aufgabe G2

Sei G ein einfacher Graph mit m Kanten $e_1, \ldots, e_m$. Dann ist der *Kantengraph* $L(G)$ von G folgendermaßen definiert: $L(G)$ hat m Knoten $v_1, \ldots, v_m$ und $\{v_i, v_j\}$ ist genau dann eine Kante von $L(G)$, wenn die beiden Kanten e_i und e_j zu einem Knoten v aus G inzident sind.

(a) Zeigen Sie, dass der Kantengraph eines einfachen eulerschen Graphen wieder eulersch ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kantengraph eines einfachen hamiltonischen Graphen wieder hamiltonisch ist.

Aufgabe G3

Formulieren Sie einen Algorithmus für den Isomorphietest von Bäumen und analysieren Sie seine Komplexität.

Aufgabe G4

Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $T = (V, E)$ ein Baum und sei p_i die Anzahl der Knoten mit Grad i. Dann gilt: $p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \cdots + (n-3)p_{n-1} = p_1 - 2$.

Aufgabe G5

Ritter aus zwei verfeindeten Burgen sitzen um einen runden Tisch bei Friedensverhandlungen. Die Anzahl der Ritter, zu deren Rechten ein Feind sitzt, ist gleich der Anzahl der Ritter, zu deren Rechten ein Verbündeter sitzt. Beweisen Sie, dass die Gesamtzahl der Ritter durch 4 teilbar ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Seien $d_1, \ldots, d_n$ positive ganze Zahlen ($n \geq 2$). Zeigen Sie, dass genau dann ein Baum mit den Knotengraden $d_1, \ldots, d_n$ existiert, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Ein Turnier ist ein gerichteter Graph, in dem für je zwei verschiedene Ecken u und v genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) enthalten ist.

(a) Zeigen Sie, dass es in jedem Turnier einen gerichteten hamiltonschen Weg gibt.

(b) Betrachte eine Gruppe von n Personen, so dass zwischen je zweien eine Dominanzrelation besteht. Eine Person, die alle anderen dominiert, heißt Diktator. Eine Person P heißt graue Eminenz, wenn für alle Personen Q, die P nicht dominiert, eine Person R existiert, die von P dominiert wird und selbst Q dominiert (also $P \to Q$ oder es existiert ein R mit $P \to R \to Q$). Zwar gibt es nicht in jeder Gruppe einen Diktator. Zeigen Sie, dass es jedoch immer eine graue Eminenz gibt!

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender Graph G genau dann einen nicht geschlossenen Eulerschen Weg besitzt, wenn G genau zwei Knoten mit ungeradem Grad hat.

Aufgabe H4 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Ein ungerichteter Graph G auf $n \geq 3$ Knoten, die alle mindestens Grad $\frac{n}{2}$ haben, besitzt einen hamiltonischen Kreis.