



5. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

$$(2, 2, 3, 3, 3, 3) \quad (1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6) \quad (2, 2, 4, 4, 6, 6, 6)$$

Aufgabe G2

- Für welche $n \geq 2$ gibt es einen Graphen, dessen Gradfolge aus n verschiedenen Zahlen besteht?
- Für welche n gibt es einen Graphen auf n Ecken, dessen Gradfolge $n - 1$ verschiedene Zahlen enthält (d.h. genau zwei Ecken haben denselben Grad)?

Aufgabe G3

Sei $\Gamma = ([n], A)$ ein (gerichteter) Graph, in dem jeder Kante $(i, j) \in A$ ein Gewicht $w_{ij} \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird. Setze

$$A_\Gamma := (a_{ij}) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \quad \text{wobei } a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & : (i, j) \in A, \\ +\infty & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche Bedingung müssen die Gewichte w_{ij} erfüllen, so dass der Eintrag von $\bigoplus_{k=0}^{n-1} A_\Gamma^{\odot k}$ in Zeile i und Spalte j genau die Länge eines kürzesten Weges von Knoten i zum Knoten j im Graphen Γ ist?

Bemerkung: Die Länge eines Weges in Γ ist die Summe der Gewichte seiner Kanten.

Aufgabe G4

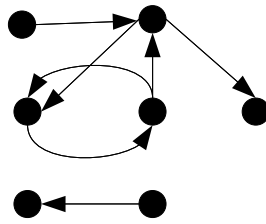
Bestimmen Sie alle Paare (k, n) , für die es einen k -regulären Graphen auf n Ecken gibt.

Hausübung

Aufgabe H1

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die starken Zusammenhangskomponenten des folgenden Graphen:

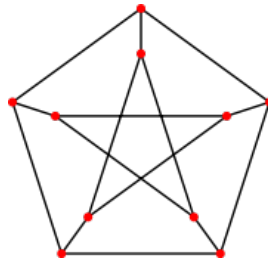


Definition: Ein Graph G heißt k -kantenzusammenhängend (im Folgenden kurz k -zusammenhängend), wenn G nach Entfernen von $k - 1$ beliebigen Kanten noch zusammenhängend ist.

Aufgabe H2

(6 Punkte)

Sei G ein zusammenhängender Graph, in dem für jede Kante e zwei Zyklen C_1, C_2 existieren, die e enthalten und keine weitere Kante gemeinsam haben. Beweisen Sie, dass G 3-zusammenhängend ist und zeigen Sie damit, dass der unten abgebildete Petersen-Graph 3-zusammenhängend ist.



Aufgabe H3

(6 Punkte)

Sei G ein gerichteter Graph auf n Knoten. Wie kann sich die Anzahl starker Zusammenhangskomponenten von G ändern, wenn wir eine einzige Kante hinzufügen?

Aufgabe H4

(6 Punkte)

Sei G ein *kritisch 2-zusammenhängender Graph*; d.h. G ist 2-zusammenhängend, aber kein Graph $G - e$ für $e \in E(G)$ ist 2-zusammenhängend.

- Beweisen Sie, dass mindestens ein Knoten von G Grad 2 hat.
- Finden Sie für jedes n ein Beispiel eines kritisch 2-zusammenhängenden Graphen mit einem Knoten vom Grad mindestens n .
- Geben Sie für jedes n ein Beispiel eines kritisch 2-zusammenhängenden Graphen mit einem Knoten vom Grad $\geq n$, der von allen Knoten vom Grad 2 mindestens den Abstand n hat.