Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Claudia Möller

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/10
11. November 2009

4. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Fünf Tischtennisspieler wollen ein Doppelturnier durchführen. Bei einem Doppel spielen je zwei Spieler gegen zwei andere Spieler, der übrigbleibende ist Schiedsrichter. Jede solche Kombination soll auch gespielt werden. Das Turnier dauert mehrere Tage und kein Team spielt zweimal an einem Tag.

(a) Veranschauliche das Turnier mit Hilfe eines Graphen.

(b) Wieviele Tage sind für das Turnier mindestens nötig?

Aufgabe G2

Eine Eckenmenge A in einem Graphen G heißt unabhängig, falls keine zwei Ecken aus A durch eine Kante verbunden sind. $\alpha(G) = \max\{\#A : A \text{ unabhängig}\}$ heißt Unabhängigkeitszahl von G. Zeige für $\Delta = \max\{\deg(u) : u \in V\}$:

$$\alpha(G) \geq \frac{\#V}{\Delta + 1}$$

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass der ungerichtete vollständige Graph K_n auf $n \geq 3$ Knoten genau

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k-1)!}{2}$$

ungerichtete einfache Kreise besitzt.

Aufgabe G4

Eine Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : V \to C$(Farbmenge), so dass $\{u, v\} \in E$ impliziert, dass $f(u) \neq f(v)$. Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die kleinste Anzahl von Farben, die man zur Färbung von G benötigt.

(a) Zeige $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq \#V$

(b) Zeige die Ungleichungen $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq \#V + 1$ und $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq \#V$

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Sei G ein Graph auf n Knoten mit genau k Zusammenhangskomponenten. Zeigen Sie, dass ein kürzester Weg von x nach y in G höchstens Länge $n - k$ hat.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Bridge ist ein Spiel, in dem zwei Teams von jeweils zwei Partnern gegeneinander antreten. Es gibt einen Bridge–Club, der folgende Regel eingeführt hat: Wenn zwei Spieler einmal als Partner angetreten sind, können sie nicht erneut an einem Spiel teilnehmen (weder als Partner noch als Gegner).

15 Mitglieder des Clubs wollen gegeneinander antreten. Allerdings entscheidet sich einer davon, sich lieber mit diskreter Mathematik zu beschäftigen. Die übrigen 14 Personen nehmen sich vor, solange zu spielen, bis jeder viermal gespielt hat. Obwohl die neue Regel es den Bridge–Liebhabern nicht einfach macht, entscheiden sie sich zu insgesamt sechs weiteren Spielen.

Anschließend kommt der bislang abwesende Mathematiker und möchte wenigstens einmal mitspielen. Beweisen Sie mit graphentheoretischen Mitteln, dass dies sogar möglich ist.

Hinweis: Benutzen Sie dazu, dass die maximale Anzahl von Kanten in einem dreiecksfreien Graph mit n Knoten $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ ist (Mantel, 1907).

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Zeige, dass es für jedes gerade $n \geq 4$ immer einen 3-regulären Graphen mit n Ecken gibt.

Aufgabe H4 (6 Punkte)

(a) Gegeben seien die Funktionen $f_1, g_1, f_2, g_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f_1(x) \in O(g_1(x))$ und $f_2(x) \in O(g_2(x))$. Zeigen Sie:

i. $f_1(x) + f_2(x) \in O(g_1(x) + g_2(x))$

ii. $f_1(x) \cdot f_2(x) \in O(g_1(x) \cdot g_2(x))$

(b) Wie kann man die folgenden Aussagen in wenigen Worten ausdrücken?

$$f(x) \in O(1) \quad g(x) \in \Omega(1) \quad h(x) \in x^{O(1)}$$