



## 3. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1

In der letzten Übung vor der Klausur werden die 90 anwesenden Studierenden nach ihren bisherigen Kenntnissen befragt. Von ihnen teilen 72 Studierende mit, dass sie Kapitel 1 beherrschen, 43 sagen, dass sie Kapitel 2 im Griff haben, und 35 geben an, Kapitel 3 zu können. 38 Studierende beherrschen Kapitel 1 und 2, nur 22 Kapitel 2 und 3, und 25 Kapitel 1 und 3. Aber 8 Studierende geben zu, bisher kein einziges Kapitel gelernt zu haben. Wieviele Studierende kennen sich (nach eigener Aussage) schon mit allen drei Kapiteln aus?

#### Aufgabe G2

- (a) Zeigen Sie, dass ein Graph  $G$  mit  $n \geq 2$  Knoten und  $m > \binom{n-1}{2}$  Kanten zusammenhängend ist.
- (b) Zeigen Sie, dass es (bis auf Isomorphie) genau einen unzusammenhängenden Graphen mit  $\binom{n-1}{2}$  Kanten gibt.

#### Aufgabe G3

Sei  $k \geq 1$  fest und  $f_k(n)$  die Anzahl der Permutationen auf  $\{1, 2, \dots, n\}$  ohne Zykel der Länge  $k$ . Bestimmen Sie  $f_k(n)$  und berechnen Sie anschließend  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_k(n)}{n!}$ .

#### Aufgabe G4

Beweisen Sie für die Eulersche  $\varphi$ -Funktion folgende Gleichung:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

**Hinweis:** Betrachten Sie für  $d|n$  die Mengen  $S_d = \{k \cdot \frac{n}{d} : (k, d) = 1, 1 \leq k \leq d\}$ .

# Hausübung

## Aufgabe H1

(6 Punkte)

Das Komplement eines Graphen  $G = (V, E)$  ist definiert als der Graph  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  mit

$$\bar{E} := \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w\}$$

- (a) Zeige: Ist  $\varphi$  ein Isomorphismus eines Graphen  $G_1$  auf einen Graphen  $G_2$ , dann ist  $\varphi$  auch ein Isomorphismus von  $\bar{G}_1$  auf  $\bar{G}_2$ .
- (b) Welche der Graphen mit 4 Knoten sind selbstkomplementär, d.h. isomorph zu ihrem eigenen Komplement? Geben Sie jeweils den Isomorphismus an.

## Aufgabe H2

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die untere Schranke  $e(n/e)^n \leq n!$ .

## Aufgabe H3

(6 Punkte)

Sei  $A^k$  die  $k$ -te Potenz der Adjazenzmatrix eines Graphen  $G = (V, E)$ . Zeige:

- (a)  $a_{ij}^{(k)}$  ist die Anzahl der Wege von  $v_i$  nach  $v_j$  mit genau  $k$  Kanten.
- (b) Die Anzahl der (nicht notwendigerweise induzierten) Kreise der Länge 4 ist

$$\frac{1}{8} \left( \text{Spur}(A^4) - 2|E| - 4 \sum_{v \in V} \binom{\deg(v)}{2} \right)$$

## Aufgabe H4

(6 Punkte)

Bestimmen Sie für  $1 \leq k \leq n$  die Anzahl der Permutationen von  $n$  Objekten mit genau  $k$  Fixpunkten.