



3. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

In der letzten Übung vor der Klausur werden die 90 anwesenden Studierenden nach ihren bisherigen Kenntnissen befragt. Von ihnen teilen 72 Studierende mit, dass sie Kapitel 1 beherrschen, 43 sagen, dass sie Kapitel 2 im Griff haben, und 35 geben an, Kapitel 3 zu können. 38 Studierende beherrschen Kapitel 1 und 2, nur 22 Kapitel 2 und 3, und 25 Kapitel 1 und 3. Aber 8 Studierende geben zu, bisher kein einziges Kapitel gelernt zu haben. Wieviele Studierende kennen sich (nach eigener Aussage) schon mit allen drei Kapiteln aus?

Aufgabe G2

- (a) Zeigen Sie, dass ein Graph G mit $n \geq 2$ Knoten und $m > \binom{n-1}{2}$ Kanten zusammenhängend ist.
- (b) Zeigen Sie, dass es (bis auf Isomorphie) genau einen unzusammenhängenden Graphen mit $\binom{n-1}{2}$ Kanten gibt.

Aufgabe G3

Sei $k \geq 1$ fest und $f_k(n)$ die Anzahl der Permutationen auf $\{1, 2, \dots, n\}$ ohne Zykel der Länge k . Bestimmen Sie $f_k(n)$ und berechnen Sie anschließend $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_k(n)}{n!}$.

Aufgabe G4

Beweisen Sie für die Eulersche φ -Funktion folgende Gleichung:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $d|n$ die Mengen $S_d = \{k \cdot \frac{n}{d} : (k, d) = 1, 1 \leq k \leq d\}$.

Hausübung

Aufgabe H1

(6 Punkte)

Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist definiert als der Graph $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit

$$\bar{E} := \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w\}$$

- (a) Zeige: Ist φ ein Isomorphismus eines Graphen G_1 auf einen Graphen G_2 , dann ist φ auch ein Isomorphismus von \bar{G}_1 auf \bar{G}_2 .
- (b) Welche der Graphen mit 4 Knoten sind selbstkomplementär, d.h. isomorph zu ihrem eigenen Komplement? Geben Sie jeweils den Isomorphismus an.

Aufgabe H2

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die untere Schranke $e(n/e)^n \leq n!$.

Aufgabe H3

(6 Punkte)

Sei A^k die k -te Potenz der Adjazenzmatrix eines Graphen $G = (V, E)$. Zeige:

- (a) $a_{ij}^{(k)}$ ist die Anzahl der Wege von v_i nach v_j mit genau k Kanten.
- (b) Die Anzahl der (nicht notwendigerweise induzierten) Kreise der Länge 4 ist

$$\frac{1}{8} \left(\text{Spur}(A^4) - 2|E| - 4 \sum_{v \in V} \binom{\deg(v)}{2} \right)$$

Aufgabe H4

(6 Punkte)

Bestimmen Sie für $1 \leq k \leq n$ die Anzahl der Permutationen von n Objekten mit genau k Fixpunkten.