Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Claudia Möller

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/10
27. Oktober 2009

2. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

In einer Vorlesung sitzen 110 Studierende, die natürlich alle die Übungen besuchen wollen. Für die Gruppen stehen 4 Räume zur Verfügung, wobei einer der Räume sehr klein ist. Daher sollen die Studenten in eine 20-Personen- und drei 30-Personengruppen eingeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe G2

Sei $c_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen π von $\{1,\ldots,n\}$ mit exakt k Zykeln. Die Zahlen $s_{n,k} := (-1)^{n-k}c_{n,k}$ heißen *Stirling–Zahlen der ersten Art*. Beweisen Sie für die Zahlen $c_{n,k}$ die Rekursion:

$$c_{n,k} = (n-1)\cdot c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1} \ (n,k \geq 1),$$

wobei $c_{n,k} = 0$ für $n \leq 0$ oder $k \leq 0$ außer $c_{0,0} = 1$.

Aufgabe G3

Die folgende Aufgabe heißt Josephus-Problem (nach dem Historiker des 1. Jahrhunderts Flavius Josephus): n Menschen sind im Kreis aufgestellt, wir nummerieren sie von 1 bis n. Jede zweite Person wird (im Uhrzeigersinn) eliminiert, wobei die Zählung bei 1 beginnt. Bestimme die Nummer $J(n)$ der letzten Person.
Beispiel: $n = 10$, der Reihe nach werden eliminiert: 2,4,6,8,10,3,7,1,9, also $J(10) = 5$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Rekursionen

$$J(2n) = 2J(n) - 1 \ (n \geq 1), \ J(2n+1) = 2J(n) + 1 \ (n \geq 1), \ J(1) = 1$$

.

Aufgabe G4

Auf wie viele Arten kann ein König von der linken unteren Ecke eines Schachbrettes nach der rechten oberen ziehen, wenn er stets nach oben, nach rechts oder diagonal nach rechts oben zieht?
Hinweis: Setzen Sie r gleich der Anzahl der Diagonalzüge und summieren Sie dann über r.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

a) Zehn Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Jede Person geht alleine nach Hause. Wie oft werden Hände gedrückt?

b) Zehn Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden Hände gedrückt?

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Eine Additionskette für n ist eine Folge $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_m = n$, so dass für alle k gilt: $a_k = a_i + a_j$ für gewisse $i, j < k$.
Beispiel: $n = 19$ und $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8 = 4 + 4, a_5 = 9 = 8 + 1, a_6 = 17 = 9 + 8, a_7 = 19 = 17 + 2$.
Sei $l(n)$ die kürzeste Länge einer Additionskette für n. Zeige (wobei lg den Logarithmus zur Basis 2 bezeichnet):

$$\lg(n) \leq l(n) \leq 2\lg(n)$$

Gibt es Zahlen n mit $l(n) = \lg(n)$?

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Die *Euler–Zahlen* $A_{n,k}$ zählen die Permutationen π von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Anstiegen, d.h. k Stellen i mit $\pi_i < \pi_{i+1}$. Zum Beispiel haben wir für $n = 3$: $A_{3,0} = 1$, $A_{3,1} = 4$, $A_{3,2} = 1$. Zeigen Sie die Rekursion:

$$A_{n,k} = (n-k)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k} \ (n > 0) \text{ mit } A_{0,0} = 1, A_{0,k} = 0 \ (k > 0).$$

Aufgabe H4 (6 Punkte)

Beweisen Sie die Formel

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} \ (n, r \in \mathbb{N}).$$