Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl.-Math. Claudia Möller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
20. Oktober 2009

1. Übungsblatt zur „Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Im Parlament eines Landes gibt es 151 Sitze und 3 Parteien. Wieviele Möglichkeiten (i, j, k) der Sitzverteilung gibt es, so dass keine Partei eine absolute Mehrheit hat?

Aufgabe G2

Zeigen Sie, dass für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n},$$

wobei für gerades n die beiden mittleren Koeffizienten zusammenfallen.

Aufgabe G3

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten folgendes Spiel: Zwei Spieler schreiben gemeinsam eine Folge von Nullen und Einsen auf. Sie beginnen mit einer leeren Zeile und ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, an das Ende der Zeile eine 0 oder eine 1 zu schreiben. Ein Spieler verliert, wenn die von ihm hinzugefügte Ziffer einen Block der Länge n erzeugt, der in der Folge schon einmal vorkommt (auch wenn die beiden Positionen überlappen).

(a) Beweisen Sie, dass dieses Spiel stets nach endlich vielen Schritten ein Ende findet.

(b) Angenommen, n ist ungerade. Zeigen Sie, dass der zweite Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe G4

Für die folgenden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man

(a) alle Zykel,

(b) $\sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ sowie σ^{33},

(c) ob sie gerade oder ungerade sind

(d) und stelle sie jeweils als Produkt (d.h. Hintereinanderausführung) von Transpositionen dar.

Hausübung

Aufgabe H1

Zwei Kandidaten A und B erhalten bei einer Wahl a bzw. b Stimmen, wobei $a > b$. Auf wieviele Arten können die Stimmzettel arrangiert werden, sodass A bei einer Auszählung entsprechend dieser Anordnung stets mehr Stimmen hat als B? Zeige, dass die gesuchte Anzahl $\frac{a-b}{a+b} \cdot \binom{a+b}{a}$ ist.

Hinweis: Zeichne eine Folge von Punkten (x, y), wobei y die Anzahl der A-Stimmen minus Anzahl der B-Stimmen sind, wenn bereits x Stimmen ausgezählt sind.

Aufgabe H2

Beweisen Sie die Gleichung

$$\begin{aligned}\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} &= \binom{n-1}{k_1 - 1, k_2, k_3, \ldots, k_m} \\ &\quad + \binom{n-1}{k_1, k_2 - 1, k_3, \ldots, k_m} \\ &\quad + \cdots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m - 1}\end{aligned}$$

$(n \geq 1, k_1 + \cdots + k_m = n, k_i \geq 1)$.

Aufgabe H3

Beweisen Sie den Multinomialsatz durch Induktion nach n:
Für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \cdots + k_m = n,\ k_1, \ldots, k_m \geq 0} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

Aufgabe H4

Sei $f_{n,k}$ die Anzahl der k-Untermengen von $1, \ldots, n$, welche kein Paar aufeinanderfolgender Zahlen enthalten. Zeige:

(a) $f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$

(b) $\sum_k f_{n,k} = F_{n+2}$
wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist (d.h. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$)