Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
20.10.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Problems for Manifolds

Problem 1 – Differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$:
Betrachten Sie die beiden aus je einer Karte bestehenden differenzierbaren Atlanten

$$\mathcal{A} := \{(\mathrm{id}, M)\}, \qquad \mathcal{B} := \{(x^3, N)\}$$

der topologischen Mannigfaltigkeit $M := N := \mathbb{R}$.

a) Warum ist x eine Karte von

b) Zeigen Sie, daß die durch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bestimmten differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{R}$ verschieden sind.

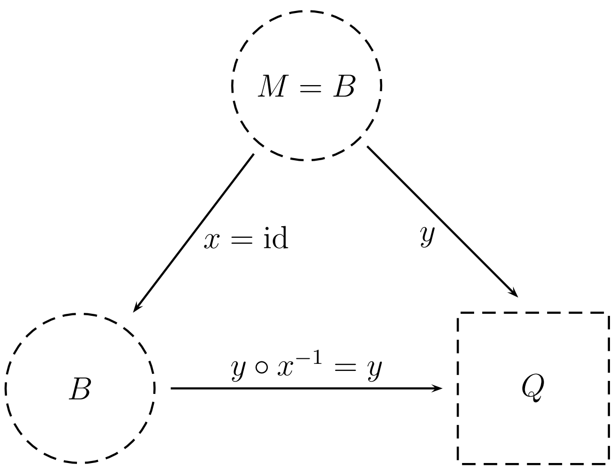
c) Welche der beiden folgenden Abbildungen von M nach N sind Diffeomorphismen?
• $f(x) = \sqrt[3]{x}$ • Identität.

Bemerkung: Es gibt aber auch Paare differenzierbarer Strukturen, die nicht durch Diffeomorphismus auseinander hervorgehen, z.B. auf $\mathbb{R}^4$ und auf vielen Sphären. Die nicht-Standard-Struktur heißt dann *exotische differenzierbare Struktur*.

Problem 2 – Zwei differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}^2$:
Es sei $M := B = \{q \in \mathbb{R}^2 : \|q\|^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe. Wir betrachten zwei Karten von M. Einerseits sei $x\colon D \to D$ die Identität. Andererseits sei

$$y\colon B \to Q := \{q \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 < q_1, q_2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2, \qquad y(q) = \begin{cases} r(q)q, & q \neq 0, \\ 0, & q = 0, \end{cases}$$

eine Abbildung auf das Einheitsquadrat mit Seitenlänge 2. Dabei ist $r\colon B\setminus\{0\} \to [1, \sqrt{2}]$ so gewählt, dass y den Rand des Balles ∂B auf den Rand des Quadrats ∂Q abbildet.



a) Verifizieren Sie, dass y eine Karte für M ist.

b) Warum wird durch x und y jeweils eine differenzierbare Struktur auf M gegeben?

c) Zeigen Sie, daß die beiden Karten x und y nicht miteinander verträglich sind, so dass auch die Strukturen nicht miteinander verträglich sind.

Problem 3 – Foliations as non-Hausdorff-spaces:

A *foliation [Blätterung]* of $\mathbb{R}^n$ is a decomposition of the entire space $\mathbb{R}^n$ into submanifolds, called *leaves*, of the same dimension $0 < k < n$. See Lee, Introduction to smooth manifolds, p. 510, for a precise definition and some pictures of foliations.

a) Set $x \sim y :\Leftrightarrow x$ and y are contained in the same leaf. Check that this defines an equivalence relation.

b) We let the *leaf space* be $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n / \sim$ and define a topology on $\mathcal{F}$: A set $U \subset \mathcal{F}$ is open if the union of the leaves represented by U is open in $\mathbb{R}^n$. Convince yourself that this defines a topology.

c) From now on we consider the case $n = 2$ and $k = 1$. Consider the foliation of $\mathbb{R}^2$ by parallel lines. Show that $\mathcal{F}$ is homeomorphic to $\mathbb{R}$.

d) Foliate two disjoint half-spaces with parallel lines, and the strip inbetween with U-shaped curves (Reeb foliation). Show that $\mathcal{F}$ is non-Hausdorff.
Hint: Let $\ell_{1,2}$ be the two special lines bounding the strip. Represent the restriction of the foliation in the two halfspaces by rays, and the strip by an interval; reason for that Now study neighbourhoods of the points representing $\ell_{1,2}$.

e) Increase now the number of Reeb components – what does $\mathcal{F}$ look like?

f) Can Reeb components be nested? *Hint*: The space in between two Reeb leaves is homeomorphic to an open strip.

g) Speculation: Convince yourself that leaves are never homeomorphic to $\mathbb{S}^1$, but always to $\mathbb{R}$, and that they leave each compact set. Guess how we could define a *non-Hausdorff tree* (are continuous curves defined in $\mathcal{F}$?) and give evidence that $\mathcal{F}$ has a structure of a non-Hausdorff tree.