Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
05.02.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 58 – Test:

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen stimmen: Beweis oder Gegenbeispiel.

a) Sind J_1, J_2, J_3 Jacobifelder, so auch $J_1 + 2J_2 + 3J_3$.

b) Jacobifelder haben konstante Länge.

c) Ist J Jacobifeld ohne Nullstelle, so ist $J/|J|$ parallel.

Aufgabe 59 – Tangentiale und normale Jacobifelder:

Sei J ein Jacobifeld längs einer Geodätischen c. Zeigen Sie, dass sowohl Normalanteil $J^\perp := J - g(J, c')c'$ als auch Tangentialanteil $J^{\tan} := g(J, c')c'$ ebenfalls Jacobifelder sind.

Aufgabe 60 – Tangentiale Jacobifelder:

Es seien J, J_1, J_2 Jacobifelder längs einer Geodätischen $c(t)$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $g(J_1', J_2) - g(J_1, J_2')$ ist konstant in t.

b) $g(J', c')$ ist konstant und $g(J, c')$ linear in t.

c) Ist $J(0) \perp c'(0)$ und $J'(0) \perp c'(0)$, so ist $J(t) \perp c'(t)$ für jedes t.

d) Es sei $\mathcal{J}$ der Raum der Jacobifelder längs c, und $\mathcal{J}^\perp := \{J \in \mathcal{J} \mid J(t) \perp c'(t) \ \ \forall t\}$. Dann ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}^\perp \oplus \operatorname{span}\{c', tc'\}$. Insbesondere hat $\mathcal{J}^\perp$ Dimension $2n - 2$.

Aufgabe 61 – Jacobifeld auf Rotationsfläche:

Sei $\varphi(t, \alpha) := \big(r(t)\cos\alpha,\, r(t)\sin\alpha,\, h(t)\big)$ eine Rotationsfläche, deren Meridiane $t \mapsto \varphi(t, \alpha)$ nach Bogenlänge parametrisiert seien. Finden Sie ein Jacobifeld längs eines Meridians. Berechnen Sie die Gauß-Krümmung der Rotationsfläche aus der Jacobi-Gleichung.

Aufgabe 62 – Produktmannigfaltigkeiten:

Es seien (M_1, g^1) und (M_2, g^2) nicht-leere Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Laut Aufg. 43 ist $N := M_1 \times M_2$ mit der Metrik $h_{(p,q)}(X, Y) := g^1_p(X_1, Y_1) + g^2_q(X_2, Y_2)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Hierbei schreiben wir ein Vektorfeld Z auf N als $Z = (Z_1, Z_2)$ mit $Z_i := d\pi_i(Z)$, wobei $\pi_i : N \to M_i$ die Projektion ist $(i = 1, 2)$.

a) Zeigen Sie $R_{(p,q)}(X, Y)Z = (R^1_p(X_1, Y_1)Z_1, R^2_q(X_2, Y_2)Z_2)$.

b) Wieso gibt es für jedes $(p, q) \in N$ immer eine Ebene σ in $T_{(p,q)}N$ mit $K_{(p,q)}(\sigma) = 0$?

c) Bestimmen Sie alle Schnittkrümmungen des Riemannschen Produktes $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, wobei $\mathbb{S}^2$ die Standardmetrik besitzt.

Anmerkung: H. Hopf fragte in den fünfziger Jahren, ob $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ irgendeine Metrik positiver Krümmung besitzt. Das Problem ist nach wie vor offen.

Aufgabe 63 – Schnittkrümmung:

Sie sind in einem Punkt p des Weltraums, den wir als eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen. Wie würden Sie die Schnittkrümmung $K_p(\sigma)$ ermitteln? Geben Sie möglichst präzise an, was Sie messen müssen, und welche Rechnung Sie mit den Ergebnissen machen. (Sie können Längen messen und kennen die Bahnen von Lichtstrahlen.)