Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
29.01.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 53 – Zweite Variation eines Großkreises:

Auf $\mathbb{S}^2$ betrachten wir den Großkreis $c(t) := e_3 \cos t + e_1 \sin t$ und seine Variation durch Großkreise $h_s(t) := e_3 \cos t + \sin t(e_1 \cos s + e_2 \sin s)$.

a) Zeigen Sie, dass das Variationsfeld $V(t)$ orthogonal zu $c'(t)$ ist.

b) Für welche t ist h_s eigentlich?

c) Was ist $L(h_s([0,\pi]))$?

d) Berechnen Sie die zweite Variation der Bogenlänge von $c([0,\pi])$.

Aufgabe 54 – Krümmung von Rotationsflächen:

a) Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung des Rotationsparaboloids

$$P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

b) Sei $(r,h)\colon I \to (0,\infty) \times \mathbb{R}$ eine reguläre Kurve. Geben Sie die Gaußsche Krümmung für eine Rotationsfläche $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ an.

Aufgabe 55 – Linearisierung:

Die Linearisierung einer Differentialgleichung $L(t,u,u') = u' - f(t,u) = 0$ ist definiert als

$$\frac{\partial}{\partial s} L(t, u + sv, (u+sv)')|_{s=0}\,.$$

a) Linearisieren Sie die quadratische Differentialgleichung $u' - u^2 = 0$.

b) Machen Sie sich deutlich, dass die Jacobische Differentialgleichung eine Linearisierung der Geodätengleichung (Gleichung 25 aus der Vorlesung) ist.

Aufgabe 56 – Diskrete Gruppenoperation auf $\mathbb{H}^2$:

Sei $\mathbb{H}^2$ die obere Halbebene. Betrachten Sie die durch $g(z) = z + 2$ und $h(z) = \frac{z}{2z+1}$ erzeugte Gruppe H, sie ist eine Untergruppe der *Modulgruppe* $\mathsf{SL}(2,\mathbb{Z})$.

a) Zeigen Sie, dass H diskret (insbesondere fixpunktfrei) durch Isometrien auf $\mathbb{H}^2$ operiert. Was folgt daraus?

b) Beschreiben Sie $\mathbb{H}^2/H$ geometrisch.

Aufgabe 57 – Satz von Myers:

Beweisen Sie folgende Aussage:
Sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gilt

$$\mathrm{Ric}_p(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} g(R(X,e_i)e_i, X) \geq \frac{1}{r^2}$$

für alle $p \in M$ und $X \in T_pM$ mit $g(X,X) = 1$, wobei $r \in (0,\infty)$ und e_i Orthonormalbasis von $T_pM \cap (X(p))^\perp$ ist, dann ist $\mathrm{diam}(M) \leq \pi r$.