Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
22.1.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 49 – Kontraktionen:

a) Was ist die Kontraktion eines $(1,1)$-Tensors?

b) Zeigen Sie, dass eine Kontraktion basisinvariant ist.

c) Die Ricci-Krümmung wird definiert durch $\mathrm{Ric}_p(X) := \frac{1}{\|X\|^2}\sum_{k=1}^{n-1} g\big(R(e_k,X)X,e_k\big)$, wobei e_k eine Orthonormalbasis in $T_pM \cap (X(p))^\perp$ ist. Warum hängt auch dieser Ausdruck nicht von der Basiswahl ab?

Aufgabe 50 – Linsenräume:

Indem wir $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ identifizieren, wird $\mathbb{S}^3 = \big\{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : w\bar{w} + z\bar{z} = 1\big\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir $\mathbb{Z}_k = \{\zeta_\kappa := e^{2\pi i\kappa/k} : 0 \le \kappa \le k-1\}$ als multiplikative Gruppe k-ter Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

a) $\mathbb{Z}_k$ operiert auf $\mathbb{S}^3$ durch $(w,z) \mapsto (w\zeta_\kappa, z\zeta_\kappa^m)$ eigentlich diskontinuierlich, und zwar für jedes $m \in \mathbb{N}$, das teilerfremd zu k ist.

b) $\mathbb{Z}_k$ operiert durch Isometrien (oder auch orthogonal). Daher hat der Quotientenraum $L(k,m) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_k$ mit Riemannscher Quotientenmetrik die konstante Krümmung $+1$. Warum ist $\pi_1(L(k,1)) \neq 0$, wenn $k \ge 2$?

c) Finden Sie eine geschlossene Geodätische mit Länge $2\pi/k$ in $L(k,1)$.

d) Bestimmen Sie r, so dass $\exp_p : B_r \to L(k,1)$ injektiv ist für alle $p \in L(k,1)$.

Aufgabe 51 – Zweite Bianchi-Identität:

Wir betrachten den Tensor $T(X,Y,U,V) := g\big(R(X,Y)U,V\big)$. Zeigen Sie die *zweite Bianchi-Identität*

$$\nabla T(X,Y,U,V,W) + \nabla T(X,Y,V,W,U) + \nabla T(X,Y,W,U,V) = 0.$$

Dabei ist die Tensorableitung ∇T definiert durch die Produktregel

$$\partial_X T(Y_1,\dots,Y_r) := \nabla T(Y_1,\dots,Y_s,X) + T(\nabla_X Y_1, Y_2,\dots,Y_s) + \ldots + T(Y_1,\dots,\nabla_X Y_s).$$

Tipp: Für $p \in M$ wähle geeignete Felder X_i mit $\nabla_{X_i} X_j(p) = 0$. Rechne dafür die obige Tensorableitung aus –zyklische Summe!– und benutze die Jacobi-Identität.

Aufgabe 52 – Satz von Schur:

Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \ge 3$. Zeigen Sie: Ist M *isotrop*, d.h. $K_p(\sigma)$ hängt von σ nicht ab, so hängt $K_p(\sigma)$ sogar von p nicht ab; M ist also eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung.
Tipp: Sei $T'(W,Z,X,Y) := g(Z,X)g(W,Y) - g(W,X)g(Z,Y)$. Setzen wir $T(W,Z,X,Y) := g(R(W,Z)X,Y)$, so gilt nach Satz 6 dann $T_p = \kappa(p)T'_p$. Folgern Sie dann aus der 2. Bianchi-Identität, $\nabla T(W,Z,X,Y,U) + \nabla T(W,Z,Y,U,X) + \nabla T(W,Z,U,X,Y) = 0$, dass

$$\begin{aligned} 0 =& \partial_U\kappa\Big(g(Z,X)g(W,Y) - g(W,X)g(Z,Y)\Big) + \partial_X\kappa\Big(g(Z,Y)g(W,U) \\ &- g(W,Y)g(Z,U)\Big) + \partial_Y\kappa\Big(g(Z,U)g(W,X) - g(W,U)g(Z,X)\Big). \end{aligned}$$

Wählen Sie nun X,Y,Z orthonormal und $U = Z$. Es folgt $g\big((\partial_Y\kappa)X - (\partial_X\kappa)Y, W\big) = 0$. Warum verschwindet also κ?