Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
15.1.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 44 – Testfragen:

a) Warum ist $\mathbb{R}^n$ flach?

b) Welche der folgenden Ausdrücke sind $\mathcal{D}(M)$-linear, wenn $f \in \mathcal{D}(M)$ und $X, Y \in \mathcal{V}(M)$?
• $X \mapsto \nabla_X Y$ • $Y \mapsto \nabla_X Y$ • $X \mapsto fX$ • $X \mapsto [X, Y]$

Aufgabe 45 – Krümmung von H^2:

Berechnen Sie die Krümmung des oberen Halbebenen-Modells.

Aufgabe 46 – Hyperbolische Isometrien:

Sei $\partial H^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\bar{H}^2 = H^2 \cup \partial H^2$. Eine Isometrie der abgeschlossenen oberen Halbebene $\bar{H}^2$ heißt

- hyperbolisch, wenn sie zwei Fixpunkte in ∂H^2 hat;
- elliptisch, wenn sie einen Fixpunkt in H^2 hat;
- parabolisch, wenn sie einen Fixpunkt in ∂H^2 hat.

a) Sei $T \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$. Überzeugen Sie sich davon, dass $Tz = z$ eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten ist.
Diskutieren Sie die Lage der Nullstellen und zeigen Sie, dass T entweder hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist.

b) Können Sie konkrete Möbiustransformationen angeben, die 0, 1, 2 bzw. 3 Fixpunkte in $\bar{H}^2$ besitzen?

Aufgabe 47 – Skalierte Metriken:

Eine gegebene Riemannsche Metrik g werde mit einem konstanten Faktor $r \in \mathbb{R}$ multipliziert, $\widetilde{g} := rg$.

a) Unter welcher Bedingung an r ist $\widetilde{g}$ ebenfalls Riemannsche Metrik?

Wie ändern sich

b) die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k;

c) der Riemannsche Krümmungstensor;

d) die Schnittkrümmung (bzw. Gaußkrümmung in Dimension $n = 2$)?

e) Sind Geodätische von (M, g) auch Geodätische von $(M, \widetilde{g})$?

Aufgabe 48 – Konforme Metriken:

Nun sei (M, g) semi-Riemannsch und $\widetilde{g} = \lambda g$, wobei $\lambda \in \mathcal{D}(M)$.

a) Wie muss λ gewählt werden, damit auch $(M, \widetilde{g})$ semi-Riemannsch ist?

b) Für welche λ besitzen g und $\widetilde{g}$ den gleichen Index?

c) Sind Geodätische von (M, g) auch Geodätische von $(M, \widetilde{g})$? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.