Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
11.12.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

8. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 33 – Geodätische minimieren nicht hinter Schnittpunkt:

Sei M vollständig und $c : [0, 1 + \delta) \to M$ eine Geodätische mit $\delta > 0$, so dass $c|_{[0,1]}$ Kürzeste von $p = c(0)$ nach $q = c(1)$ ist.
Zeigen Sie: Gibt es eine weitere Kürzeste zwischen p und q, dann ist c auf $[0, 1 + \delta]$ nicht mehr Kürzeste.

Aufgabe 34 – Strahlen:

Ein *Strahl* durch p ist eine Geodätische $c : [0, \infty) \to M$ mit $c(0) = p$, die auf jedem endlichen Teilstück Kürzeste ist. Sei M vollständig, aber nicht kompakt.
Zeigen Sie: Für jedes $p \in M$ gibt es einen Strahl durch p.

Aufgabe 35 – Rotationsparaboloid:

a) Jede vertikale Ursprungsebenen schneidet das Rotationsparaboloid $P = \{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ in einer Geodätischen.

   Tipp: Benutzen Sie die Spiegelsymmetrie von P um die Ebene.

b) Benutzen Sie die vorige Aufgabe, um zu zeigen, dass jeder dieser Schnitte Strahlen durch den Pol 0 des Paraboloids definiert.

c) Zeigen Sie, dass genügend lange Teilstücke im Schnitt von P mit vertikalen Ursprungsebenen nicht Kürzeste sind.

   Tipp: Es reicht Geodätische durch 0 zu betrachten, die symmetrisch um 0 sind. Betrachten Sie die Distanz der Endpunkte.

Aufgabe 36 – Transitive Isometrien:

Wenn die Isometriegruppe transitiv auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) operiert, d.h. für alle $p, q \in M$ gibt es eine Isometrie φ mit $\varphi(p) = q$, so ist M vollständig.