Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
4.12.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 29 – Verkürzung einer Ecke:

Betrachten Sie die Kurve mit Ecke $c\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t,0)$ für $t \leq 0$ und $c(t) := (0,t)$ für $t \geq 0$. Geben Sie eine konkrete Variation h_s an, die c verkürzt.

Aufgabe 30 – Verkürzung einer Kurve in der hyperbolischen Ebene:

Betrachten Sie die Strecke $c(t) := (t,1)$, $t \in [0,1]$ im oberen Halbebenen-Modell von $\mathbb{H}^2$. Finden Sie eine verkürzende (eigentliche) Variation von c.

Aufgabe 31 – Kürzeste Kurven zu einer Menge:

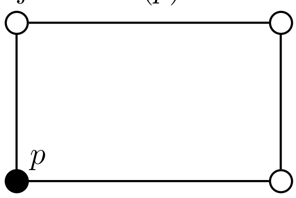
Sei $K \subset M$ eine kompakte Menge mit glattem Rand und $p \in M \setminus K$. Zeigen Sie: Ist $c\colon [a,b] \to M$ Kurve eine kürzeste Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) \in K$, so trifft c die Menge K senkrecht.
Tipp: Was sagt die erste Variation, falls es nicht so ist?

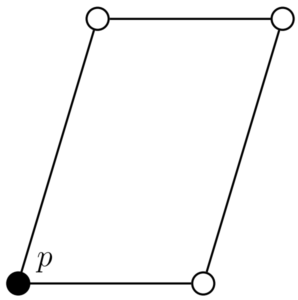
Aufgabe 32 – Schnittort auf dem Torus:

Der *Schnittort* eines Punktes $p \in M$ ist die Menge

$$C(p) := \{q \in M \;:\; \text{es gibt mehr als eine Kürzeste von q nach p}\}$$

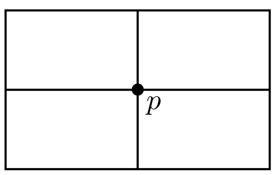
1. (i) Die folgenden Abbildungen repräsentieren zweidimensionale Tori (rechteckiger Torus, allgemeiner Torus).
   Zeichnen Sie jeweils $C(p)$ ein.

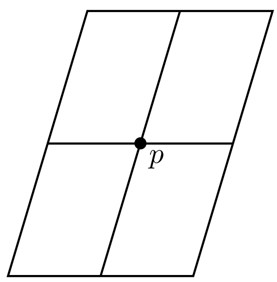
   

   Verwenden Sie am besten zwei bzw. drei Farben.

   (ii) Wir betrachten nun vier nebeneinander liegende Fundamentalbereiche.

   Verwenden Sie am besten auch hier unterschiedliche Farben.

   (iii) Stellen Sie beide Tori als identifiziertes Viereck bzw. Sechseck dar, wobei Sie zu identifizierende Kanten mit Pfeilen versehen. Zeichnen Sie alle Kürzesten vom Mittelpunkt p zu einem Eckpunkt q des Vierecks bzw. Sechsecks ein.

2. Sei $p \in \mathbb{R}P^2$ ein Punkt der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$. Bestimmen Sie die Menge $C(p)$.
   Hinweis: Repräsentieren Sie $\mathbb{R}P^2$ durch die obere Hemissphäre von S^2, und wählen Sie p als Nordpol.