Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
27.11.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 24 – Quiz zur Exponentialabbildung:

In $\mathbb{R}^n$ gilt $\exp_p(v) = \ldots\ldots\ldots\ldots$. Also ist $d(\exp_p)_v(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
Betrachten wir nun die Sphäre $\mathbb{S}^2$. Sei $p \in \mathbb{S}^2$.

a) Es sei $v \in T_p\mathbb{S}^2$ mit $|v| = \pi/2$. Bestimmen Sie geometrisch und als Formel:
   - $\exp_p v$
   - $d(\exp_p)_v \frac{v}{|v|}$
   - $d(\exp_p)_v w$ für $w \perp v$ ein Einheitsvektor.

b) Es sei $v \in T_p\mathbb{S}^2$ mit $|v| = \pi$. Bestimmen Sie wiederum:
   - $\exp_p v$
   - $d(\exp_p)_v \frac{v}{|v|}$
   - $d(\exp_p)_v w$ für $w \perp v$ ein Einheitsvektor.

c) Gibt es ein $v \in T_p\mathbb{S}^2$ so dass $(d\exp_p)_v v = 0$?

Aufgabe 25 – Geodätische auf dem Zylinder:

Es sei Z ein Zylinder in $\mathbb{R}^3$, z.B. $Z = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass es für je zwei Punkte $p \neq q$ auf Z unendlich viele Geodätische von p nach q in Z gibt.

b) Gilt das auch für $p = q$?

Aufgabe 26 – Geodätische unter Isometrien:

Gibt es auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Metrik, bezüglich welcher alle Ursprungskreise Geodätische sind?

Aufgabe 27 – Erste Variation der Energie:

Es sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c\colon [a,b] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Weiter sei h_s eine eigentliche Variation von c mit Vektorfeld V.

a) Berechnen Sie die erste Variation $\delta_V E(c)$ des Energiefunktionals $E(c) := \int_a^b \|c'\|^2\,dt$.

b) Zeigen Sie, dass genau dann $\delta_V E(c) = 0$ für alle eigentlichen Variationen mit Vektorfeld V gilt, wenn c eine Geodätische ist.

Aufgabe 28 – Geodätische in $\mathsf{SO}_n(\mathbb{R})$:

Wir definieren $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, dabei sei $A^0 := \mathbf{1}$.

a) Zeigen Sie, dass $\exp(A)$ für jedes $A \in M_n(\mathbb{R})$ konvergiert, so dass $\exp\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$.

b) Wir definieren durch $c(t) := \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k$ ein Kurve $c\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie c', c'' und zeigen Sie mit der Differentialgleichung von c die Identität $c(s+t) = c(s)c(t)$.

c) Wir bezeichnen den Vektorraum der schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen mit $\mathsf{o}_n(\mathbb{R})$, und den der symmetrischen mit $\mathsf{Sym}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass man bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die orthogonale Zerlegung $\mathsf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathsf{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathsf{o}_n(\mathbb{R})$ hat.

d) Für $A \in \mathsf{o}_n(\mathbb{R})$ folgern Sie nun mit b) und c) die folgenden Behauptungen.
   i, Die Kurve $c(t)$ liegt in der Drehgruppe, $\exp(tA) \in \mathsf{SO}_n(\mathbb{R})$.
   ii, $\|c'(t)\|$ ist konstant bezüglich der Metrik $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$.
   iii, c ist Geodätische in $\mathsf{SO}_n(\mathbb{R})$.