Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
20.11.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 20 – Quiz:

a) Eine konstante Kurve $c(t) \equiv p$ ist Geodätische.

b) Multipliziert man die Metrik g mit einer Konstanten $\lambda > 0$, so bleiben gleich: Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla_X Y$ ja/nein, $[X, Y]$ ja/nein, Parallelverschiebung ja/nein, Geodätische ja/nein.

c) Die Parallelverschiebung auf $\mathbb{R}^n$ mit Levi-Civita-Zusammenhang stimmt bezüglich aller Minkowski-Metriken $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, $k = 1, \ldots, n$ überein: Ja/nein.

d) Die Differentialgleichung für Parallelverschiebung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit den Eigenschaften: autonom/nicht-autonom, linear/nicht-linear, von ... Ordnung.

e) Die Differentialgleichung für Geodätische ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit den Eigenschaften: autonom/nicht-autonom, linear/nicht-linear, von ... Ordnung.

f) Existiert eine Isometrie $f\colon M \to N$ zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten, so stimmen die Christoffel-Symbole bezüglich beliebiger Karten x von M und y von N überein: Ja/nein.

g) Für die Lieklammer von Vektoren der Standardbasis gilt: ......

Aufgabe 21 – Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs:

Betrachten Sie den Levi-Civita Zusammenhang, der durch die Koszul-Formel definiert ist. Weisen Sie für ihn die vier Eigenschaften nach, die ein torsionsfreier und mit der Metrik verträglicher Zusammenhang erfüllen muss, (Am besten in vier Gruppen, jeder eine Eigenschaft.)

Aufgabe 22 – Christoffelsymbole in $\mathbb{R}^n$:

Zeigen Sie: Bei linearem Koordinatenwechsel $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verschwinden die Christoffelsymbole der durch f auf $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik, bei nichtlinearem f jedoch nicht.

Aufgabe 23 – Christoffelsymbole der hyperbolischen Ebene:

Wir betrachten das obere Halbebenen-Modell von $\mathbb{H}^2$.

a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole.

b) Bestimmen Sie die Geodätischen.

Hinweis: Das Ergebnis sollen Strahlen senkrecht zur x-Achse sein, sowie Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse.

c) Zwei Geodätische heißen *parallel*, falls sie keine gemeinsamen Punkte besitzten.

Zeigen Sie, dass es zu jeder Geodätischen γ in $\mathbb{H}^2$ und jedem nicht auf γ liegenden Punkt $p \in \mathbb{H}^2$ unendlich viele zu γ parallele Geodätische durch p gibt.

Bemerkung: Die hyperbolische Halbebene bildet also eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom verletzt ist.