Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
13.11.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 16 – Lokalität des Zusammenhangs:

Warum hängt für einen affinen Zusammenhang der Wert $(\nabla_X Y)(p)$ nur von den Werten von X und Y in einer Umgebung von p ab?

Aufgabe 17 – Parallelverschiebung:

Sei c eine Kurve in einer Mannigfaltigkeit M und $\tau_t\colon T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M$ die Parallelverschiebung längs c. Zeigen Sie: τ_t ist linear und bildet eine Basis auf eine Basis ab.

Aufgabe 18 – Parallelität im Normalenbündel von Kurven:

Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Sei $X\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein Normalenfeld an c, d.h. es gilt $\langle X, c'\rangle = 0$. Das Feld X heißt *parallel im Normalenbündel längs* c, wenn gilt $\frac{D}{dt}X := \left(\frac{d}{dt}X\right)^{\perp} = 0$.

a) Zeigen Sie, dass analog zu Satz 7 der Vorlesung gilt: Sind X, Y parallel im Normalenbündel längs c, so bleibt $\langle X, Y\rangle$ konstant. Insbesondere bleiben die Länge $|X|$ und der für $X \neq Y$ erklärte Winkel $\angle(X, Y)$ erhalten.

b) Es gibt eine Basis $N_1(t), \dots, N_{n-1}(t)$, des Normalenraums $\{c'(t)\}^{\perp}$, die differenzierbar von t abhängt.

c) Zu jedem gegebenen Normalenvektor $X(0)$ in $c(0)$ gibt es eine *parallele* Fortsetzung längs der Kurve c, d.h. $\frac{D}{dt}X \equiv 0$.

d) Es gibt eine parallele Orthonormalbasis längs c.

e) Geben Sie eine solche Orthonormalbasis für $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ an. Wie sieht eine geschlossene Kurve $c\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ aus, für die die parallele Orthonormalbasis sich nicht "schließt", d.h. nicht auf $\mathbb{S}^1$ erklärt ist?

Aufgabe 19 – Kovariante Ableitung auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$:

Zu einem Winkel gegenüber der Horizontalen $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sei durch

$$t \mapsto \gamma(t, \vartheta) := (\cos\vartheta \cos t,\ \cos\vartheta \sin t,\ \sin\vartheta), \quad t \in [0, 2\pi),$$

ein Breitenkreis auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Seine Einheitstangente sei $X(t, \vartheta) := \frac{\gamma'(t,\vartheta)}{|\gamma'(t,\vartheta)|}$, wobei $\gamma'(t, \vartheta)$ die Ableitung nach t bedeutet.

a) Berechnen Sie die kovariante Ableitung $\frac{D}{dt}X(t, \vartheta) = \left(\frac{d}{dt}X(t, \vartheta)\right)^{\top}$. Was ist die kovariante Ableitung von $X(t, \vartheta)$ längs des Äquatorkreises?

b) Berechnen Sie die Projektionen $\left\langle \frac{D}{dt}X(t, \vartheta),\ \gamma(t, \vartheta)\right\rangle$ und $\left\langle \frac{D}{dt}X(t, \vartheta),\ X(t, \vartheta)\right\rangle$ für $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Deuten Sie Ihre Ergebnisse geometrisch (*Tipp:* normal, tangential, $\frac{d}{dt}\|X\|$).

Das Feld $X(t, \vartheta)$ ist für $\vartheta \neq 0$ nicht parallel. Wir konstruieren nun ein paralleles Feld.

c) Bestimmen Sie ein $Y(t, \vartheta)$, so dass $\{X(t, \vartheta), Y(t, \vartheta)\}$ eine orthonormale Basis der Tangentialebene an $T_{\gamma(t,\vartheta)}\mathbb{S}^2$ bildet.

d) Bestimmen Sie einen (konstanten) Drehwinkel $\alpha = \alpha(\vartheta)$, so dass das rotierende Feld $Z(t, \vartheta) := \cos(\alpha t)X(t, \vartheta) + \sin(\alpha t)Y(t, \vartheta)$ längs des Breitenkreises $\gamma(., \vartheta)$ parallel wird.