Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
6.11.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 10 – Gruppenoperationen:

Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen Gruppenoperationen definieren und entscheiden Sie, welche Gruppenoperationen diskret sind:

a) Die Gruppe $G = (\mathbb{Z}_7, +)$ durch Rotationen $\{\varphi_k = \text{Rotation um Winkel } 2k\pi/7\colon k \in \mathbb{Z}_7\} \subset \mathsf{SO}(2)$ auf $\mathbb{R}^2$.

b) Die Gruppe $G = (\mathbb{Z}^n, +)$ durch $\varphi_a(x) := a + x$ auf $\mathbb{R}^n$.

c) Die Gruppe $G = (\mathbb{R}, +)$ durch $\varphi_a(x, y) := (a + x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$.

d) Die Gruppe $G = (\mathsf{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ durch

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

auf der oberen Halbebene $\{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon y > 0\}$.

Aufgabe 11 – Punktsymmetrische Untermannigfaltigkeiten:

Wir nennen eine Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ *punktsymmetrisch*, wenn $0 \notin M$, und $p \in M$ genau dann, wenn $-p \in M$. Zeigen Sie:

a) Die Operation von $G := \mathbb{Z}_2$ durch $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$ ist diskret auf jeder punktsymmetrischen Untermannigfaltigkeit.

b) M/G ist Hausdorffsch.

c) Betrachten Sie nun Rotationstorus, Zylinder und $\mathbb{S}^n$. Überlegen Sie, welche topologischen Räume die Quotienten darstellen?

Aufgabe 12 – Christoffel-Symbole des Zylinders:

Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Zylinders dargestellt als Graph über $\mathbb{R}^2 \times (-1, 1)$.

Aufgabe 13 – Parallelverschiebung auf $\mathbb{S}^2$:

Betrachten Sie zwei Großkreisbögen c_1 und c_2, welche den Nordpol $(0, 0, 1)$ und den Südpol $(0, 0, -1)$ der Einheitssphäre verbinden und sich in den Polen rechtwinklig schneiden. Es sei ferner X der Tangentialvektor von c_1 im Norpol.

Welchen Winkel bilden die Parallelverschiebungen von X entlang c_1 und c_2 am Südpol? (Skizze reicht!)

Aufgabe 14 – Parallelverschiebung auf dem Kegel:

Einen Kegel kann man durch *isometrisches Aufrollen* eines ebenen Sektors $M \subset \mathbb{R}^2$ mit Öffnungswinkel $\alpha > 0$ erhalten. Dabei sei $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ die entsprechende Parametrisierung des Kegels. Auf M haben wir die Standard-Fundamentalform $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) Begründen Sie anschaulich, dass die Immersion f eine Isometrie ist.

b) Was sind daher die Christoffel-Symbole der Immersion f?

Ein Breitenkreis des Kegels werde durch ein Kreissegment in M parametrisiert.

c) Wie sieht ein paralleles Vektorfeld X in M längs des Kreissegments aus? Warum ist sein isometrisches Bild $df \cdot X$ ebenfalls parallel?

d) Geben Sie den Drehwinkel an, den das drehende Feld $df \cdot X$ bei einem vollen Umlauf um den Breitenkreis ausführt.

Aufgabe 15 – Parallelverschiebung entlang Breitenkreis von $\mathbb{S}^2$:

Untersuchen Sie die Parallelverschiebung längs eines Breitenkreises von $\mathbb{S}^2$ mit Höhe $0 < h < 1$ über dem Äquator.
Finden Sie dazu einen an $\mathbb{S}^2$ im Breitenkreis tangentialen Kegel. Wickeln Sie diesen Kegel auf ein Winkelsegment der Ebene ab. Welchen Winkel hat das entstehende Segment? Bestimmen Sie nun die Parallelverschiebung mithilfe der vorigen Übung.