Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
30.10.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 5 – Matrixdarstellung von Bilinearformen:

Es sei $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.

a) Geben Sie zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V eine symmetrische $n \times n$-Matrix A an mit
$$b(v, w) = v^T \cdot A \cdot w\,.$$

b) Gibt es eine Basis, für die A diagonal ist? (Zitieren Sie einen Satz!)

c) Stellen Sie eine Bedingung an A (bzw. b), so dass A Rang n hat. Geben Sie dann eine Basis an, so dass die Diagonale von A nur Elemente ± 1 enthält.

Aufgabe 6 – Metrik auf einem Graphen:

Für $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ betrachten wir den Graphen $M := \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_3 = f(u_1, u_2)\}$.

a) Warum ist M Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u_1, u_2) := \big(u_1, u_2, f(u_1, u_2)\big)$ eine Immersion?

b) Für $p \in M := \mathbb{R}^2$ sei $g_p(X, Y) := \langle d\varphi \cdot X, d\varphi \cdot Y\rangle$ für $X, Y \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$. Warum ist g_p eine symmetrische Bilinearform auf M?

c) Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform
$$g_{ij}(p) := g_p\left(\frac{\partial}{\partial u_i}(p), \frac{\partial}{\partial u_j}(p)\right), \quad 1 \le i, j \le 2.$$

Aufgabe 7 – Polarkoordinaten:

Es sei $P\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gegeben.

a) Wählen Sie ein maximales $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so dass P Immersion ist. Warum ist P lokaler Diffeomorphismus?

b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Standardmetrik auf dem Bild. Bestimmen Sie die Riemannsche Metrik g auf Ω, so dass P lokale Isometrie wird.

Aufgabe 8 – Längen von Kurven:

Berechnen Sie die Längen L der Kurven

a) $c_{-1}\colon [0, T_{-1}] \to M^2_{-1}$, $c_{-1}(t) = (0, t)$, mit $T_{-1} < 1$;

b) $c_{+1}\colon [0, T_{+1}] \to M^2_{+1}$, $c_{+1}(t) = (0, t)$, mit $T_{+1} > 0$.

Aufgabe 9 – Metrik auf Matrizenräumen:

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebige Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass
$$g(A, B) := \mathrm{Spur}\,(A \cdot B)$$
eine symmetrische Bilinearform darstellt.

b) Was ist das Vorzeichen von $g(A, A)$, falls A symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist?

c) Berechnen Sie den Index von g. Schreiben Sie dazu eine gegebene Matrix A als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.