Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann, J. Plehnert
23.10.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 1 – Quiz:

Prüfen Sie die folgenden Behauptungen bzw. beantworten Sie:

1. Karten sind immer Homöomorphismen auf ihr Bild.
2. Jeder Atlas enthält alle zu ihm differenzierbar verträglichen Karten.
3. Das Quadrat $Q = \{0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Mannigfaltigkeit.
4. Die Menge $\Gamma = \{y = \pm\sqrt{x}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Mannigfaltigkeit.
5. Sei $f \in \mathcal{D}(M)$ und $\varphi\colon M \to N$. Wofür stehen die Kurzschreibweisen $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$?
6. Auf jedem Torus T^n gibt es ein nicht-verschwindendes Vektorfeld.
7. Können die Ausdrücke $\partial_X f$ bzw. $\partial_Y \partial_X f$ definiert sein, auch wenn man das Vektorfeld X in nur einem Punkt kennt?

Aufgabe 2 – Polarkoordinaten:

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sowie den Punkt $p = (1, 0) \in M$.

Gegeben seien zwei Karten um p: Einerseits die Karte $(x := \mathrm{id}, M)$ und andererseits die Karte $\big(y, (0, \infty) \times \mathbb{R}\big)$, so dass

$$y^{-1}\colon (0,\infty) \times \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \longrightarrow M, \qquad y^{-1}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

a) Wie lautet die Standardbasis $\{X_1, X_2\}$ bezüglich x?

b) Was ist die Standardbasis $\{Y_1, Y_2\}$ bezüglich y in p? Drücken Sie diese in Termen von X_1 und X_2 aus.

c) Berechnen Sie die Kartenwechsel $x \circ y^{-1}$ und $y \circ x^{-1}$.

d) Berechnen Sie das Differential $d(x \circ y^{-1})_{y(p)}$.

Aufgabe 3 – Orientierbarkeit:

Zwei Karten (x, U), (y, V) einer Mannigfaltigkeit M heißen *orientierbar verträglich*, wenn gilt

$$p \in U \cap V \quad \Rightarrow \quad \det\big(d(y \circ x^{-1})\big)_{x(p)} > 0.$$

Die Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn es einen Atlas $\mathcal{A}$ gibt, so dass alle Kartenwechsel orientierbar verträglich sind.

a) Geben Sie zwei Beispiele eines Paares von Karten einer Mannigfaltigkeit an, die eine orientierbar verträglich, die andere nicht.

b) Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M das Tangentialbündel TM orientierbar ist.

Aufgabe 4 – Lie-Klammer in der Ebene:

a) Geben Sie ein Beispiel von zwei nicht-konstanten Vektorfeldern X, Y der Ebene $\mathbb{R}^2$, deren Kommutator verschwindet, und ein weiteres Paar von Vektorfeldern, für das der Kommutator nicht verschwindet.

b) Der Kommutator zweier Vektorfelder X, Y sei von der Form $[X, Y] = aX + bY$ mit $a, b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ glatten Funktionen. Weiter gelte $[X, Y]_p \neq 0$. Zeigen Sie durch Lösung einer Differentialgleichung, dass es in einer Umgebung $U(p)$ von p Funktionen $f, g\colon U(p) \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $[fX, gY] = 0$ in $U(p)$.