Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
17.12.2009

# 9. Tutorium zur „Analysis II“

## Extrema unter Nebenbedingungen

**Aufgabe T1**

Man bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$, der vom Punkt $(1, 0, 0)$ den kleinsten Euklidischen Abstand hat.

Wir konnten diese Aufgabe leicht auf eine “gewöhnliche” Extremwertaufgabe zurückführen, indem wir die Nebenbedingung in die zu minimierende Funktion eingesetzt haben. Bei der folgenden Aufgabe wäre dieses Vorgehen wesentlich umständlicher.

**Aufgabe T2**

Es sollen diejenigen Punkte der Ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \text{ mit } a > 0 \text{ und } ac > b^2\}$$

bestimmt werden, welche von ihrem Mittelpunkt $(0, 0)$ maximalen oder minimalen Abstand haben.

Wir verschieben die Lösung dieser Aufgabe und überlegen uns zunächst einen Satz, der uns dieses umständliche Einsetzen der Nebenbedingung erspart.

**Satz.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die im Punkt $a$ ein lokales Maximum (Minimum) unter der Nebenbedingung $g = 0$ besitzt (d.h. es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von $a$ so, dass*

$$f(a) \geq f(x) \quad \textit{bzw.} \quad f(a) \leq f(x) \qquad \textit{für alle } x \in V \cap E).$$

*Dann gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$(\operatorname{grad} f)(a) = \lambda_0 (\operatorname{grad} g)(a). \tag{Lagrange}$$

Die Zahl $\lambda_0$ heißt *Lagrange'scher Multiplikator*. Ein ähnlicher Satz gilt bei Vorliegen mehrerer Nebenbedingungen (vgl. etwa Barner/Flohr, Ana II, S. 186ff). Der Satz sagt aus, dass es ein $\lambda_0$ gibt, so, dass der Punkt $a$ ein extremwertverdächtiger Punkt der Funktion $h = f - \lambda_0 g : U \to \mathbb{R}$ ist:

Es ist ja $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$ für alle $i$ genau dann, wenn (Lagrange) gilt. Fassen wir $h$ nicht nur als Funktion von $x$, sondern von $x$ und $\lambda$ auf:

$$\tilde{h}(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x) \ : \ U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

so ist $(a, \lambda_0)$ ein extremwertverdächtiger Punkt von $\tilde{h}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \lambda} &= -g = 0, \end{aligned}$$

also $(\operatorname{grad} \tilde{h})(a) = \lambda(\operatorname{grad} g)(a)$ und $g(a) = 0$.

Lösen Sie nun die Aufgabe 2.

**Aufgabe T3**

Beweisen Sie den angegebenen Satz unter Benutzung des Satzes über implizite Funktionen.

**Aufgabe T4**

Man bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x, y) := xy^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ mit der Methode der Langrangemultiplikatoren.

Anmerkung: In diesem Fall kann man diese Aufgabe viel einfacher lösen, indem man in $f(x, y) = xy^2$ etwa $y^2$ gemäß der Nebenbedingung durch $1 - x^2$ ersetzt und nun die Stellen “freier” Extrema der Funktion

$$\varphi(x) := x - x^3 \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

ermittelt.