Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
9.12.2009

8. Tutorium zur „Analysis II“

Harmonische Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann heißt f harmonisch auf U, wenn

$$(\triangle f)(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = 0 \qquad \forall x \in U. \tag{1}$$

Die partielle Differentialgleichung (1) heißt *Laplacegleichung* und $\triangle$ der *Laplaceoperator*.

Aufgabe T1

Eine Verschiebung im $\mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch eine Koordinatentransformation $\tilde{x} = x + a$, $\tilde{y} = y + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; eine Drehung durch $\tilde{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $\tilde{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ mit $\alpha \in [0, 2\pi)$. Sei u eine harmonische Funktion: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y}))$ ebenfalls harmonisch ist: $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0$.

Zusatzaufgabe für Studierende mit Grundkenntnissen in linearer Algebra:
Bestätigen Sie diese Invarianz des Laplaceoperators gegenüber Verschiebung und Drehungen auch im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe T2

Wir betrachten in der Ebene kartesische (x, y) und Polarkoordinaten (r, φ) mit $x = r\cos\varphi$, $\varphi = r\sin\varphi$. Die Funktion u genüge der Laplacegleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
Zeigen Sie, dass für $v(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt:

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2}\, v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\, v_r = 0 \qquad \text{(= Laplacegleichung in Polarkoordinaten).}$$

Aufgabe T3

Wir betrachten im Raum $\mathbb{R}^3$ kartesische (x, y, z) und Kugelkoordinaten (r, φ, θ) mit $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{s^2 + z^2} \qquad \text{mit} \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$x = s\cos\varphi, \quad y = s\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \quad s = r\sin\theta.$$

Die Funktion u genüge der Laplacegleichung $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.
Man zeige, dass für $v(r, \varphi, \theta)$ gilt:

$$v_{rr} + \frac{2}{r}\, v_r + \frac{1}{r^2}\left(u_{\theta\theta} + (\cot\theta)u_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\, u_{\varphi\varphi}\right) = 0 \qquad \text{(= Laplacegleichung in Kugelkoordinaten).}$$

(Hinweis: Es vereinfacht die Rechnung, in zwei Schritten vorzugehen und in jedem Schritt das Resultat von Aufgabe 2 zu benutzen.)

Aufgabe T4

Bestimmen Sie die rotationssymmetrischen Lösungen der Laplacegleichung auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ und $\mathbb{R}^3$.