Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
3.12.2009

7. Tutorium zur „Analysis II“

Bernoulli-Zahlen

Nach Satz 2 aus Abschnitt 9.5 läßt sich die Funktion

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots}$$

in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ entwickeln, welche wir in der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ schreiben, d.h. mit $B_n = n!\, b_n$. Die so definierten Zahlen B_n heißen die *Bernoulli-Zahlen*.

Aufgabe T1

Berechnen Sie $B_0,\ B_1, \dots, B_5$.

Aufgabe T2

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$ für $n = 2, 3, \dots$ und dass alle B_n rational sind.

Aufgabe T3

Zeigen Sie, dass $B_{2n+1} = 0$ für $n \geq 1$.

Aufgabe T4

Machen Sie sich klar, dass

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \, \frac{\cosh(\frac{z}{2})}{\sinh(\frac{z}{2})}$$

und leiten Sie hieraus die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen $f(x) = x \cot(x)$ bzw. $g(x) = \tan(x)$ ab.

Aufgabe T5

Nach der geometrischen Summenformel ist

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kz} = \frac{e^{(n+1)z} - 1}{e^z - 1} = \frac{e^{(n+1)z} - 1}{z} \cdot \frac{z}{e^z - 1}.$$

Ersetzen Sie die hierin vorkommenden Funktionen durch ihre Potenzreihen und leiten Sie durch Koeffizientenvergleich die Summenformel für die p-ten Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen her:

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{1}{p+1} \left(\binom{p+1}{1} (n+1) B_p + \binom{p+1}{2} (n+1)^2 B_{p-1} + \dots + \binom{p+1}{p+1} (n+1)^{p+1} B_0 \right).$$