Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
25.11.2009

6. Tutorium zur „Analysis II“

Bernstein-Polynome und der Weierstraß'sche Approximationssatz

Wir wollen in diesem Tutorium den folgenden Weierstraß'schen Approximationssatz beweisen:

Satz:
Für jede auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f gibt es eine Folge (f_n) von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Wir führen den Beweis zunächst für $[a, b] = [0, 1]$. Jeder Funktion f auf $[0, 1]$ ordnen wir die Funktion

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

zu. Offenbar ist f_n für jede Funktion f ein Polynom vom Grad n. Das Polynom f_n heißt $n$tes Bernstein-Polynom für f.

Aufgabe T1

Bestimmen Sie die Bernsteinpolynome für die Funktionen $f(x) = 1$, $f(x) = x$ und $f(x) = x(1-x)$. Machen Sie sich klar, dass in allen 3 Fällen gilt:

$$\|f - f_n\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe T2

Beweisen Sie die Abschätzung

$$0 \le \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n}.$$

Wir wollen nun den Weierstraß'schen Approximationssatz auf $[0, 1]$ in der folgenden genaueren Form zeigen:

Satz:
Sei f auf $[0, 1]$ stetig. Dann konvergiert die Folge (f_n) der Bernsteinpolynome von f gleichmäßig gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle x, $y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für den Beweis des Satzes haben wir die Differenz $|f(x) - f_n(x)|$ für jedes $x \in [0,1]$ abzuschätzen. Es ist wegen Aufgabe 1

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \,, \tag{1}$$

und wir spalten die Summe in zwei Teile auf um auszunutzen, dass $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon$, wenn nur $|\frac{k}{n} - x| < \delta$. Sei dazu

$$A_n = \left\{ k: \; 0 \leq k \leq n, \; |x - \frac{k}{n}| < \delta \right\},$$
$$B_n = \left\{ k: \; 0 \leq k \leq n, \; |x - \frac{k}{n}| \geq \delta \right\}.$$

Dann ist wie gewünscht

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon \qquad \text{für } k \in A_n$$

und, mit $c := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$,

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq 2c \qquad \text{für } k \in B_n.$$

Nach Definition von B_n gilt weiter $\delta^2 \leq \left(x - \frac{k}{n}\right)^2$, daher hat man außerdem die Abschätzung

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq \frac{2c}{\delta^2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{für } k \in B_n.$$

Aufgabe T3

Schätzen Sie nun die Differenz (1) ab und führen Sie den Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes zu Ende.

Aufgabe T4

Übertragen Sie schließlich dieses Resultat auf ein beliebiges endliches Intervall $[a,b]$.