Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
19.11.2009

5. Tutorium zur „Analysis II“

Wallis'sches Produkt, Stirlingsche Formel

Unser erstes Ziel ist es, die Wallis'sche Produktformel

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} \quad \left(:= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{4n^2}{4n^2-1} \right) \tag{1}$$

zu beweisen.

Aufgabe T1

Sei $I_m(x) := \int \sin^m(x)\,dx$ für $m \geq 0$. Bestimmen Sie I_0, I_1 und zeigen Sie für $m \geq 2$ die Rekursionsformel

$$I_m = -\frac{1}{m}\cos(x)\sin^{m-1}(x) + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Aufgabe T2

Berechnen Sie hiermit die Zahlen

$$A_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x)\,dx$$

und zeigen Sie, dass

$$A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}.$$

Aufgabe T3

Schließen Sie hieraus auf die Existenz des Grenzwertes $\lim \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}$ und bestimmen Sie diesen. Leiten Sie hieraus (1) ab.

Unser zweites Ziel ist die Stirling'sche Formel, die eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Zahlen $n!$ macht. Sind (a_n), (b_n) Folgen von Zahlen $a_n, b_n \neq 0$, so nennen wir diese Folgen asymptotisch gleich und schreiben dafür $a_n \sim b_n$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Die Stirlingsche Formel lautet dann

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Beweis: Im Tutorium über numerische Integration haben wir die Trapezregel bewiesen:

Ist $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so existiert ein $\xi \in [k, k+1]$ mit

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \frac{1}{12}f''(\xi).$$

Wegen $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ folgt hieraus für $k = 1, 2, \ldots : \exists\, \xi_k \in [k, k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln(k) + \ln(k+1)\right) + \frac{1}{12\,\xi_k^2}.$$

Summation von $k = 1$ bis $n - 1$ ergibt

$$\int_1^n \ln(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_k^2}.$$

Da

$$\int_1^n \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x|_1^n = n\ln(n) - n + 1,$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + \gamma_n$$

mit $\gamma_n := 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_k^2}$. Wir nehmen von beiden Seiten die Exponentialfunktion und erhalten mit $c_n := e^{\gamma_n}$

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} c_n.$$

Aufgabe T4

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim c_n =: c$ existiert.

Aufgabe T5

Brechnen Sie c, indem Sie die Folge $\frac{c_n^2}{c_{2n}}$ betrachten und die Wallis'sche Formel benutzen. Leiten Sie hieraus die Stirlingsche Beziehung ab.

Aufgabe T6

Mit Hilfe des Wallis'schen Produktes und der Aufgabe 4 aus dem Tutorium 4 ist zu zeigen, dass

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$