Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
12.11.2009

4. Tutorium zur „Analysis II“

Die Eulersche Γ-Funktion

Eine der wichtigsten Funktionen der Analysis ist die für $x > 0$ durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Eulersche Γ-Funktion.

Aufgabe T1
Zeigen Sie, dass dieses Integral als uneigentliches Riemann-Integral existiert.

Aufgabe T2
Beweisen Sie die Funktionalgleichung für die Γ-Funktion:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \qquad \text{für alle } x > 0$$

und schließen Sie hieraus auf $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (endliches oder unendliches) Intervall. Eine Funktion $f : I \to \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ heißt logarithmisch konvex, wenn die Funktion $\ln(f) : I \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Aufgabe T3
Zeigen Sie, dass die Funktion Γ logarithmisch konvex ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung: Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist

$$\left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Durch die bislang gezeigten Eigenschaften ist die Γ-Funktion bereits vollständig charakterisiert. Genauer:

Satz: (Bohr)
Sei $F : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) $F(1) = 1$.

b) $F(x+1) = x\,F(x) \quad$ für $x > 0$.

c) F ist logarithmisch konvex.

Dann gilt $F(x) = \Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

Beweis:
Die Γ-Funktion genügt den Eigenschaften a) - c). Es genügt daher zu zeigen, dass eine Funktion F mit den Eigenschaften a) - c) eindeutig bestimmt ist.
Aus b) folgt:

$$F(x+n) = F(x) \cdot x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)$$

für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit a) zeigt dies, dass $F(n+1) = n!$ ist und dass es genügt zu beweisen, dass $F(x)$ für $x \in (0,1)$ eindeutig bestimmt ist.

Sei nun also $x \in (0,1)$. Wegen $n + x = (1-x)n + x(n+1)$ folgt aus der logarithmischen Konvexität:

$$F(n+x) \leq F(n)^{1-x} F(n+1)^x = F(n)^{1-x} F(n)^x\, n^x = (n-1)!\, n^x.$$

Aus $n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$ folgt ebenso

$$n! = F(n+1) \leq F(n+x)^x F(n+1+x)^{1-x} = F(n+x)\,(n+x)^{1-x}.$$

Kombination beider Ungleichungen liefert

$$n!\,(n+x)^{x-1} \leq F(n+x) \leq n!\, n^x$$

und weiter

$$a_n := \frac{n!\,(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n-1)} \leq F(x) \leq \frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n-1)} =: b_n.$$

Da $\dfrac{b_n(x)}{a_n(x)} = \dfrac{(n+x)\,n^x}{n(n+x)^x}$ für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, folgt

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\,n^x}{x\,(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n-1)}\ ,$$

d.h. F ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe T4

Arbeiten Sie diesen Beweis durch und zeigen Sie anschließend, dass

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n)} \qquad \text{für alle } x > 0.$$