Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
5.11.2009

3. Tutorium zur „Analysis II“

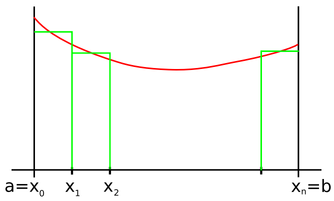
Numerische Integration

Bereits so einfache Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ oder $f(x) = e^{x^2}$ besitzen zwar eine Stammfunktion, die sich jedoch nicht mehr mit Hilfe elementarer Funktionen geschlossen darstellen läßt. Man ist daher in vielen Fällen darauf angewiesen, Integrale numerisch auszuwerten.

Aufgabe T1 (Rechteckregel)

Man ersetzt $\int_a^b f(x)\,dx$ näherungsweise durch

$$R_n(f) := \sum_{i=0}^{n-1} h\, f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \qquad \text{mit } h = \frac{b-a}{n},\; x_i = a + h\,i.$$



Zeigen Sie: Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f)\right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0.$$

Ist f auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f)\right| \le \frac{h^2}{24}\,(b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Aufgabe T2 (Trapezreel)

Man ersetzt $\int_a^b f(x)\,dx$ näherungsweise durch

$$T_n(f) := h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right).$$

Deuten Sie dies geometrisch und zeigen Sie: Für Riemann-integrierbares f gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) \right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0,$$

und für zweimal stetig differenzierbares f gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) \right| \leq \frac{h^2}{12}\,(b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$