Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
29.10.2009

2. Tutorium zur „Analysis II“

Zum Satz von Taylor

Mit Hilfe des Riemann-Integrals läßt sich eine weitere Darstellung des Restgliedes im Satz von Taylor angeben.

Aufgabe T1

Zeigen Sie folgende Version des Satzes von Taylor:

Sei f in $[a,b]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle x, $x_0 \in [a,b]$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0,x)$$

mit

$$\begin{aligned} R_n(x_0,x) &:= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(x_0+s(x-x_0))\,ds. \end{aligned}$$

Aufgabe T2

Leiten Sie hieraus die Lagrangesche Darstellung des Restgliedes ab:

$$R_n(x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Aufgabe T3

Zeigen Sie für alle $0 \le x < 1$ und $n \ge \alpha > 0$ die Abschätzungen

$$\frac{1}{1+\left|\binom{\alpha-1}{n}\right|x^n}\left(\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \left|\binom{\alpha-1}{n}\right|x^n\right)$$

$$\le (1+x)^\alpha \le$$

$$\frac{1}{1-\left|\binom{\alpha-1}{n}\right|x^n}\left(\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n - \left|\binom{\alpha-1}{n}\right|x^n\right).$$