Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
27.01.2010

12. Tutorium zur „Analysis II“

Riemann-Stieltjes-Integrale

Aufgabe T1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, g eine Funktion aus $\mathrm{BV}[a, b]$ und das RS-Integral $\int_a^b f\ dg$ möge existieren. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\left| \int_a^b f\ dg \right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).$$

Aufgabe T2

Zeigen Sie: Ist f stetig auf $[a, b]$ und $g \in \mathrm{BV}[a, b]$, so existiert das RS-Integral $\int_a^b f \mathrm{d}g$.

Aufgabe T3

Sei $c \in (a, b)$, die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ (Anmerkung: Es genügt sogar Stetigkeit von f in c) und die Funktion g sei definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \alpha & \text{für } x \in [a, c) \\ \beta & \text{für } x = c \\ \gamma & \text{für } x \in (c, b] \end{cases}$$

mit gewissen Zahlen α, β, γ. Berechnen Sie $\int_a^b f\ dg$.

Aufgabe T4

Es bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$, und f sei stetig auf $[0, n]$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_0^n f\ d[x] = \sum_{k=1}^n f(k).$$

Aufgabe T5

Sei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}, \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{für } x \in [0, 1] \end{cases}.$$

Dann existieren $\int_{-1}^0 f\ dg$ und $\int_0^1 f\ dg$, aber nicht $\int_{-1}^1 f\ dg$. Zeigen Sie diese Aussage.