Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
14.01.2010

10. Tutorium zur „Analysis II“

Funktionen von beschränkter Variation

Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *von beschränkter Variation*, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $Z = \{z_0, \ldots, z_n\}$ von $[a, b]$ gilt

$$V(g, Z) := \sum_{k=1}^{n} |g(z_k) - g(z_{k-1})| \leq M.$$

Ist g von beschränkter Variation, so heißt die Zahl

$$V_a^b(g) := \sup_z V(g, Z)$$

die Totalvariation von g auf $[a, b]$. Die Menge aller Funktionen beschränkter Variation auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathrm{BV}[a, b]$.

Aufgabe T1

Zeigen Sie: jede Treppenfunktion, jede monotone Funktion, jede Lipschitz-stetige Funktion auf $[a, b]$ gehört zu $\mathrm{BV}[a, b]$.

Aufgabe T2

Ist jede stetige Funktion von beschränkter Variation?

Ist g von beschränkter Variation auf $[a, b]$ und $[c, d] \subset [a, b]$, so ist g auch von beschränkter Variation Variation auf $[c, d]$ und

$$V_c^d(g) \leq V_a^b(g).$$

Zeigen Sie folgende “Umkehrung” dieser Aussage:

Aufgabe T3

Sei $a < c < b$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a, c]$ und $[c, b]$ von beschränkter Variation. Dann ist $g \in \mathrm{BV}[a, b]$ und es gilt

$$V_a^b(g) = V_a^c(g) + V_c^b(g).$$

Aufgabe T4

Zeigen Sie: Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier wachsender Funktionen dargestellt werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie auf $[a, b]$ die Funktion $f(x) := V_a^x(g)$.

Da monoton wachsende Funktionen nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen aufweisen können, folgt aus dieser Aufgabe und dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium, dass Funktionen von beschränkter Variation Riemannintegrierbar sind.