Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
22.10.2009

1. Tutorium zur „Analysis II“

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen

Sei $R[a,b]$ die Menge der auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen.

Aufgabe T1

Für je zwei Funktionen $f, g \in R[a,b]$ erklären wir ihre Summe $f+g$ bzw. ihr Produkt fg durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \quad (fg)(x) := f(x)g(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Zeigen Sie: $f+g$ und fg gehören wieder zu $R[a,b]$.

Aufgabe T2

Eine Funktion $d : R[a,b] \times R[a,b] \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$d(f,g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Zeigen Sie: d ist eine Metrik auf $R[a,b]$ und der metrische Raum $(R[a,b], d)$ ist vollständig.

Aufgabe T3

Zeigen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Riemann-integrierbare Funktionen f, g:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$