Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/10
29.01.2010

13. Übungsblatt zur Vorlesung Navier-Stokes Gleichungen I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, d.h. $\Delta u = 0$ in Ω. Zeigen Sie die *Mittelwerteigenschaft*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}\ \sigma(y) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} u(y) \mathrm{d}\ y,$$

für jede Kugel $B(x,r) \subset \Omega$. Folgern Sie hieraus, dass für $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ harmonisch $u \equiv 0$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $\Phi(r) := \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}\ \sigma(y)$:

$$\Phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,1)|} \int\limits_{\partial B(x,1)} u(x + rz) \mathrm{d}\ \sigma(z),$$

$$\Phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} \partial_\nu u(y) \mathrm{d}\ \sigma(y) = 0.$$

Benutzen Sie dann Polarkoordinaten.

Aufgabe G2

Beweisen Sie Bemerkung 11.10.

Aufgabe G3

Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 11.16.

Aufgabe G4

Beweisen Sie den Beweis von Bemerkung 11.21(a) und (b).

Aufgabe G5

Vervollständigen Sie den Beweis von Theorem 11.22.