Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/10
04.12.2009

8. Übungsblatt zur Vorlesung Navier-Stokes Gleichungen I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei X ein Banachraum.

(a) Sei $f : \Omega \to X$ (schwach differenzierbar) und $\Psi \in X^*$. Berechnen Sie die schwache Ableitung von

$$x \to \langle f(x), \Psi \rangle.$$

(b) Zeigen Sie Proposition 6.3.

Aufgabe G2

Erweitern Sie die Abschätzungen aus Korollar 6.10 auf Sobolev-Räume gebrochener Ordnung (siehe Definition 6.11).

Aufgabe G3

Formulieren und beweisen Sie eine Version des Theorem 6.8 für Sobolevräume gebrochener Ordnung.

Aufgabe G4

Zeigen Sie Bemerkung 6.12(b)

Aufgabe G5

Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\tilde{g}$ aus dem Beweis des Theorems 6.8 in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt.

Aufgabe G6

Sei $g \in C^m(\mathbb{R}^n_+) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ In der Situation des Beweises des Theorems 6.8 setze

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x_n \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j g(x_1, \dots x_{n-1}, -jx_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Wie muss $\lambda_1, \dots \lambda_{m+1}$ gewählt werden, so dass $\tilde{g} \in C^m(\mathbb{R}^n)$? Was ist der Unterschied zu Aufgabe G5?

Aufgabe G7

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda u - \Delta u + \nabla p = f, &\quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, &\quad \text{in } \Omega, \\ u = 0, &\quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hier:

- $u = (u_1, \dots, u_n)$ ist die Geschwindigkeit des Fluids
- p ist der Druck des Fluids
- $f = (f_1, \dots, f_n)$ ist die gegebene Kraft

(a) Diskutieren Sie die Dimensionen obiger Gleichungen.

(b) Leiten Sie (formal) eine Neumann-Laplace Gleichung für den Druck her.