Fachbereich Mathematik
M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2009/10
20.11.2009

6. Übungsblatt zur Vorlesung Navier-Stokes Gleichungen I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Vervollständigen Sie den Beweis von Theorem 5.21.

Aufgabe G2

Zeigen Sie Lemma 5.23.
Hinweis: Betrachen Sie

$$K^*(t,x) = \inf_{\Gamma(x)} \max\{x_0, tx_1\}, \quad L^*(\sigma,x) = \inf_{\Gamma(x)} \max\{x_0^{p_0}, \sigma x_1^{p_1}\} \text{ mit}$$
$$\Gamma(x) := \{(x_0,x_1) : \exists a_j \in X_j, x = a_1 + a_2,\ \|a_j\| \le x_j, j = 0,1\}.$$

Aufgabe G3

Zeigen Sie Theorem 5.26.
Hinweis: Zeigen Sie

$$K(t,\xi,\ell^1(X),\ell^\infty(X) = t\|\xi_0^*\|, t \in (0,1]$$
$$K(t,\xi,\ell^1(X),\ell^\infty(X) = \sum_{k=0}^{j-1} \|\xi_k^*\|, t > 1.$$

Um die zweite Gleichheit zu zeigen, sind folgende Überlegungen hilfreich.

$$\sum_{k=0}^{j-1} \|\xi_k^*\| \le \|\xi^0\| + j \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\xi_l^1\|, \xi = \xi^0 + \xi^1,$$
$$\xi_l^{0*} = \xi_l^* - \frac{\xi_l^*}{\|\xi_l^*\|}\|\xi_{j-1}^*, l = 0,\dots j-1, \xi_l^{0*} = 0, l \ge j.$$

Aufgabe G4

Zeigen Sie Lemma 5.28(a).

Aufgabe G5

Sei $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty))$ mit $\int_0^\infty \varphi(t)\frac{\mathrm{d}\,t}{t} = 1$ und

$$w(t) := \int_0^\infty \varphi(\frac{t}{\tau})v(\tau)\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} = \int_0^\infty \varphi(s)v(\frac{t}{s})\frac{\mathrm{d}\,s}{s},$$

$$w^*(t) := -\int_t^\infty w'(s)\mathrm{d}\,s,$$

mit v wie im Beweis von Theorem 5.21. Zeigen Sie:

(a) $\lim_{t\to 0} w(t) = x$ in $X_0 + X_1$.

(b) $w \in C^\infty((0,\infty), X_1)$, $w' \in C^\infty((0,\infty), X_0)$.

(c) $w^* \in C^\infty((0,\infty), X_1 \cap X_0)$.

(d) $\lim_{t\to 0} w^*(t) = x$ in $X_0 + X_1$.