Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10

Ferienübung zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Ferienaufgaben

Aufgabe F1 (Komplexe Zahlen)

(a) Skizzieren Sie die Menge $M = \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \,|\, 3 \leq r \leq 4 \text{ und } -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi\}$.

(b) Berechnen Sie $z = (1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Polardarstellung von $1+i$.

Aufgabe F2 (Ebenen)

Gegeben seien die beiden Ebenen $E_1 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 2$ und $E_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel von E_1 und E_2.

Aufgabe F3 (Konvergenz von Folgen)

Untersuchung Sie diese Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{n \cdot 4^n}{(n+1)!}$

(b) $b_n = \frac{5n^3-3n+1}{(2n+1)^3} \cdot \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n$

(c) $c_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-3}$

(d) $d_n = (-1)^n e^{\frac{1}{n}}$

(e) $e_n = n \cdot \cos n$

(f) $f_n = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$

(g) $g_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

(h) $h_n = \frac{(-3)^n + 6^n}{2^n + 6^n}$.

Aufgabe F4 (Konvergenz von Reihen)

Untersuchung Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2-\frac{1}{k}\right)^k}$

(e) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot \ln k}$

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}{\sqrt[k]{k}}$

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k}$

Aufgabe F5 (Stetigkeit)

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ stetig?

(b) Lässt sich die Funktion $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} & \text{für } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzen?

(c) Gibt es einen Wert $a \in \mathbb{R}$ für den sich die Funktion $h(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+1}-e}{x} & \text{für } x < 0 \\ (1+x)^{\frac{a}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzen lässt?

(d) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung der Funktion $k(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ stetig?

Aufgabe F6 (Integrationstechniken)

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i. $\int\limits_{e}^{e^5} \frac{\ln x}{x} dx$

ii. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (x \cdot \cos x) dx$

iii. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$

iv. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx$

(b) Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ konvergiert.