Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
12. Februar 2010

13. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Multiple-Choice-Aufgaben

Aufgabe M9 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)
Für die Funktion $f(x) = x \cdot |x|$ gilt:

- ☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar.
- ☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig.
- ☐ f ist stetig und differenzierbar.
- ☐ f ist weder stetig noch differenzierbar.

Aufgabe M10 (Stammfunktionen)
Eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{3}{x}$, $x > 0$, ist gegeben durch

☐ $F(x) = \ln(3 + x)$. ☐ $F(x) = \ln\left(\frac{x}{3}\right)$. ☐ $F(x) = \ln(x^3)$. ☐ $F(x) = \ln(3x)$.

Gruppenübung

Aufgabe G50 (Rotationskörper)
Gegeben sei die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Durch die Rotation von f um die x-Achse erhält man einen Trichter, dessen Volumen V und Oberfläche O durch

$$V = \pi \int_1^\infty [f(x)]^2 dx \text{ und } O = 2\pi \int_1^\infty f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

gegeben sind. Damit das ganze ein wenig hübscher aussieht, wird eine studentische Hilfskraft mit einem Pinsel und einem Eimer Farbe ausgestattet, damit sie den Trichter neu anstreicht. Eine Woche harter Arbeit verleitet unsere Hilfskraft doch zum Nachdenken und nach einer kurzen Rechnung (die Sie überprüfen sollen) kommt sie zu dem Schluss, dass sie ihre Arbeit wohl niemals beenden wird, da die Oberfläche des Trichters unendlich groß ist. Als sie dieses Problem in der Sprechstunde ihres Tutors vorbringt, erhält sie den folgenden Rat: „Fülle den Trichter doch einfach bis zum Rand mit Farbe und schütte ihn anschließend um. Dann sieht er aus wie neu.“ Ist dieser Rat wirklich praktikabel?

Aufgabe G51 (Uneigentliche Integrale)

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ (b) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$ (c) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$.

Aufgabe G52 (Integralkriterium für Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit dem Integralkriterium auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ (b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k}$ (c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (\ln k)^2}$.

Aufgabe G53 (Konvergenzradius von Potenzreihen)

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

i. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ ii. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

(b) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x+2)^k}{k \cdot 5^{k+1}}$?

Aufgabe G54 (Taylorreihen I)

Bestimmen Sie für das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1$, die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe G55 (Taylorreihen II)

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe gegen f?

Aufgabe G56 (Harmonische Reihe)

In der Vorlesung wurde die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ mit Hilfe der folgenden Ungleichung begründet:

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1.$$

Leiten Sie diese Ungleichung für $n \geq 1$ her.

Hinweis: Verwenden Sie Ober- und Untersummen.