Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
5./8. Februar 2010

# 12. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

## Multiple-Choice-Aufgaben

**Aufgabe M7** (Reihen)

Wie viele der folgenden vier Reihen sind konvergent?

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

☐ keine ☐ eine ☐ zwei ☐ drei

**Aufgabe M8** (Zweite Ableitung)

Die zweite Ableitung der Funktion $f(x) = x \cdot \ln(2x)$ hat an der Stelle 1 den Wert

☐ $-1$. ☐ 0. ☐ 1. ☐ 2.

## Gruppenübung

**Aufgabe G45** (Regel von l'Hospital)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x}$. Können Sie auf diesen Grenzwert die Regel von l'Hospital anwenden? Welches Resultat würden Sie bei unüberlegter Anwendung erhalten?

(b) Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital. Von welchem Typ sind die Grenzwerte jeweils?

i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

**Aufgabe G46** (Unter- und Obersummen)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $D_f = [0, 2]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei mit $Z_n := \left\{[\frac{0}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{4}{n}], \ldots, [\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n}]\right\}$ eine äquidistante Zerlegung von $[0, 2]$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f$ auf dem Intervall $[0, 2]$ und tragen Sie in Ihr Diagramm die Flächenelemente der Unter– bzw. Obersummen bzgl. der Unterteilung $Z_5$ ein. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Untersummen $s_f(Z_n)$ bzw. der Obersummen $S_f(Z_n)$ an.

(Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel $\sum\limits_{s=1}^{k} s^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$).

(b) Bestimmen Sie nun die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} s_f(Z_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(Z_n)$ und geben Sie $\int\limits_0^2 f(x)dx$ an.

**Aufgabe G47** (Grundlegende Integrationstechniken)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) dx$ (b) $\int (x^2 + 3\cos x) dx$ (c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 2x^3\right) dx$ (d) $\int \frac{3}{x} dx$

(e) $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2\right) dx$ (f) $\int \left(4e^x - 4x^3 + 2x + 5\sin x\right) dx$ (g) $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x} + x^{\frac{3}{5}}\right) dx$ (h) $\int \sinh x dx$

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ (k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (l) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$.

**Aufgabe G48** (Partielle Integration)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

(a) $\int_0^{\pi} (x \cdot \sin x) dx$ (b) $\int_0^{1} (x^2 \cdot e^x) dx$ (c) $\int_1^{e} (\frac{1}{x} \cdot \ln x) dx$ (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx$.

**Aufgabe G49** (Substitutionsregel)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{3\cos x} \cdot \sin x) dx$ (b) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx$ (c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$ (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx$.

# Hausübung

**Aufgabe H38** (Regel von l'Hospital) (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ (c) $\lim_{x\to\infty} (x \cdot e^{-x})$ (d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

**Aufgabe H39** (Grundlegende Integrationstechniken) (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int (\frac{2}{1+x} - \frac{1}{x^2}) dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx$ (c) $\int \sqrt{1+\sinh^2 x} dx$ (d) $\int \frac{1}{2^x} dx$.

**Aufgabe H40** (Partielle Integration) (3 Punkte + 1 Zusatzpunkt)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

(a) $\int_0^{\pi} (x^2 \cdot \sin x) dx$ (b) $\int_0^{1} (x \cdot e^x) dx$ (c) $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ (d) $\int_1^{e} \ln x dx$.

**Aufgabe H41** (Substitutionsregel) (3 Punkte + 1 Zusatzpunkt)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

(a) $\int_0^{2} (x \cdot \sqrt{1+2x^2}) dx$ (b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot e^{\sin x}) dx$ (c) $\int_0^{1} \frac{x^2}{1+x^3} dx$ (d) $\int_0^{1} \sqrt{1+x^2} dx$.

Hinweis zu d): Verwenden Sie $\int \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\sinh x \cdot \cosh x + x) + C$ und $\cosh(\operatorname{arsinh} x) = \sqrt{1+x^2}$.