Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
29. Januar/1. Februar 2010

11. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE"

Multiple-Choice-Aufgaben

Aufgabe M5 (Nullfolgen)

Wie viele der folgenden vier Aussagen sind wahr? Sei $(a_n)_n$ eine Nullfolge und $(b_n)_n$ eine konvergente Folge. Dann ist die Folge $(c_n)_n$ mit den Folgengliedern

- $c_n = a_n b_n$ stets eine Nullfolge.
- $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ eine Nullfolge.
- $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ keinesfalls eine Nullfolge.
- $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ keinesfalls eine Nullfolge.

☐ keine ☐ eine ☐ zwei ☐ drei

Aufgabe M6 (Grenzwert)

Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ hat den Grenzwert

☐ 1. ☐ e. ☐ e^2. ☐ ∞.

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Differentialquotient)

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, mit Hilfe des Differentialquotienten. In welchen Punkten ist die Funktion differenzierbar?

Aufgabe G41 (Differenzierbarkeit von Funktionen)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = |x|^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass f für $n = 1$ nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Was gilt für $n \geq 2$?

Aufgabe G42 (Technik des Differenzierens)

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

(a) $f_1(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
(b) $f_2(x) = (x^2-1)(x^7-3x+1)$
(c) $f_3(x) = \frac{5}{x^3} - 4$
(d) $f_4(x) = \frac{7x^2+2x}{27x^3-3}$
(e) $f_5(x) = \sqrt{x^3-2x+1}$
(f) $f_6(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-2x}}$
(g) $f_7(x) = 4x^3 - 2x^{-\frac{1}{3}}$
(h) $f_8(x) = \frac{x^2-\sin x}{2+\sin x}$
(i) $f_9(x) = \cos(\sin x)$
(j) $f_{10}(x) = e^{-x^2}$
(k) $f_{11}(x) = \ln(\sin(x^3-4x+2))$
(l) $f_{12}(x) = x^x$.

Aufgabe G43 (Differentiation der Umkehrfunktion)

Es sei die Funktion $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben. Berechnen Sie die erste Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $x_0 = 1$.

Aufgabe G44 (Newton-Verfahren)

Wir wollen in dieser Aufgabe ein Verfahren herleiten, mit dem sich Gleichungen der Form $f(x) = 0$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ näherungsweise lösen lassen, die nicht exakt lösbar sind. Wir nehmen dazu weiterhin an, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt, und die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ streng monoton steigend ist.

(a) Was lässt sich aus den Voraussetzungen für die Anzahl der Nullstellen von f im Intervall $[a, b]$ folgern?

(b) Das Verfahren basiert darauf, von einem geratenen Startwert $x_0 \in [a, b]$ aus, von dem man vermutet, dass er der gesuchten Lösung nahe liegt, schrittweise bessere Näherungswerte zu erzeugen. Dazu betrachtet man im aktuellen Näherungswert x_n die Tangente der Funktion f und berechnet deren Nullstelle. Diese verwendet man als neuen Näherungswert x_{n+1} und wiederholt das Verfahren. Es lässt sich zeigen, dass die so erhaltene Folge $(x_n)_n$ unter geeigneten Voraussetzungen gegen eine Lösung $\xi \in [a, b]$ der Gleichung $f(x) = 0$ konvergiert. Dieses Verfahren heißt *Newton-Verfahren.*

i. Veranschaulichen Sie sich das Newton-Verfahren an Hand einer Skizze und stellen Sie die Gleichung der Tangente an f im Punkt $(x_n, f(x_n))$, $x_n \in [a, b]$, auf.

ii. Berechnen Sie die Nullstelle x_{n+1} der in i. gefundenen Tangente. Dies ergibt eine Formel für die neue Näherungslösung $x_{n+1} \in [a, b]$ der Gleichung $f(x) = 0$.

(c) Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um die Gleichung $f(x) = 0$ mit $f(x) = x - \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, auf 5 Nachkommastellen genau zu lösen. Verwenden Sie als Startlösung $x_0 = 0$.

(d) Berechnen Sie $\sqrt{2}$ auf 5 Nachkommastellen genau. Wählen Sie dafür eine geeignete Funktion f und wenden Sie das Newton-Verfahren für eine geeignete Startlösung auf die Gleichung $f(x) = 0$ an.

Hausübung

Aufgabe H35 (Technik des Differenzierens) (4 Punkte)

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

(a) $f_1(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{4x^2+5x^4+1}$

(b) $f_2(x) = \sin(8x - \frac{3}{x^4+1})$

(c) $f_3(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{1+x^2}}$

(d) $f_4(x) = \sqrt{4x^2+4x+1} - 2x$.

Aufgabe H36 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 \cdot e^{-|x-5|}$.

(a) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig, für welche differenzierbar?

(b) Wie lauten Abbildungsvorschrift und Definitionsmenge von f'?

(c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g(x) = (x-5)^2 \cdot e^{-|x-5|}$ differenzierbar?

Aufgabe H37 (Differentiation der Umkehrfunktion) (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = \tan x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Vereinfachen Sie soweit, bis Sie die Formel aus der Vorlesung erhalten.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{e} x \cdot \ln x$ mit dem Definitionsbereich $D_f = [\frac{1}{e}, \infty)$. Berechnen Sie die erste Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $x_0 = 1$.